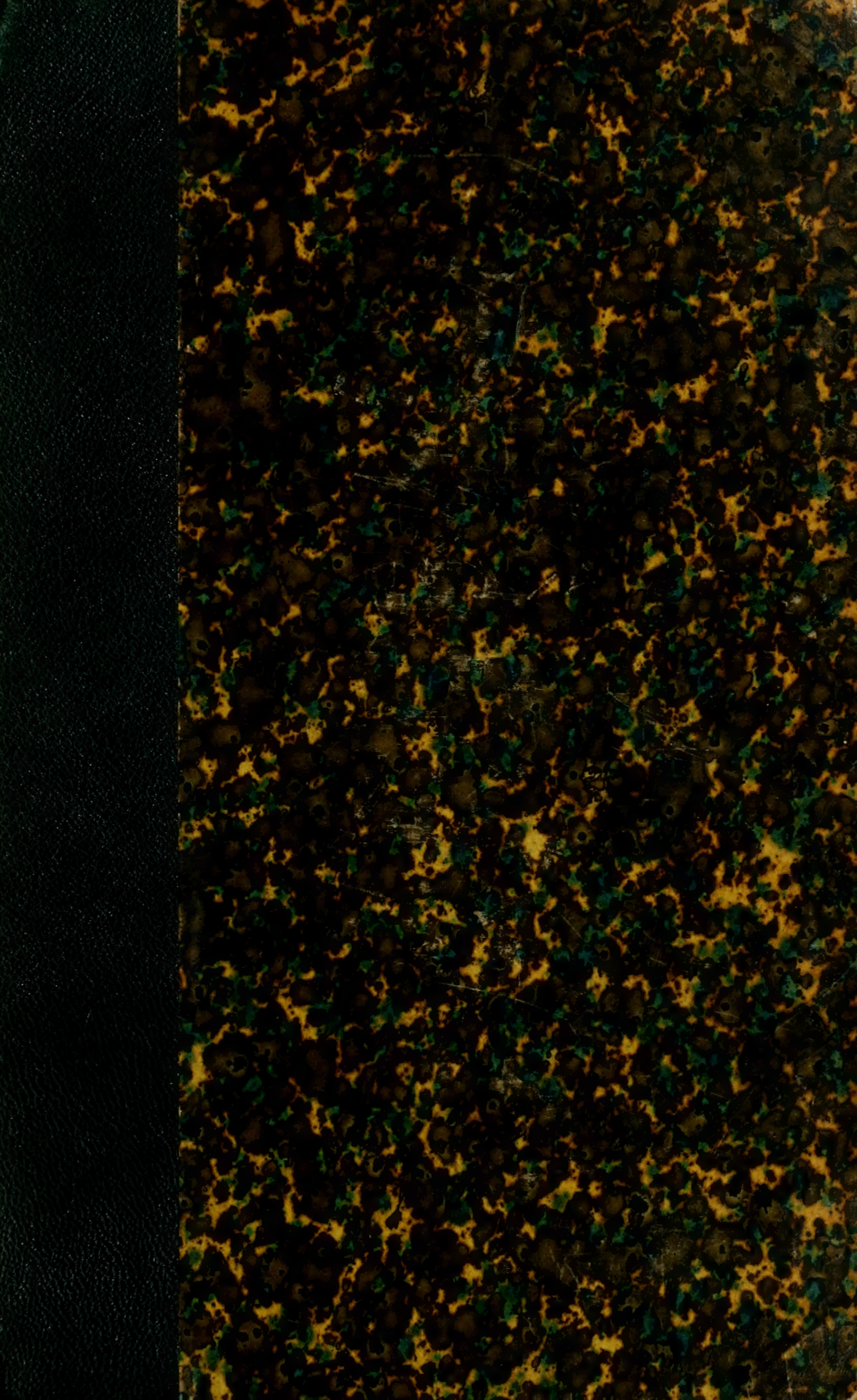
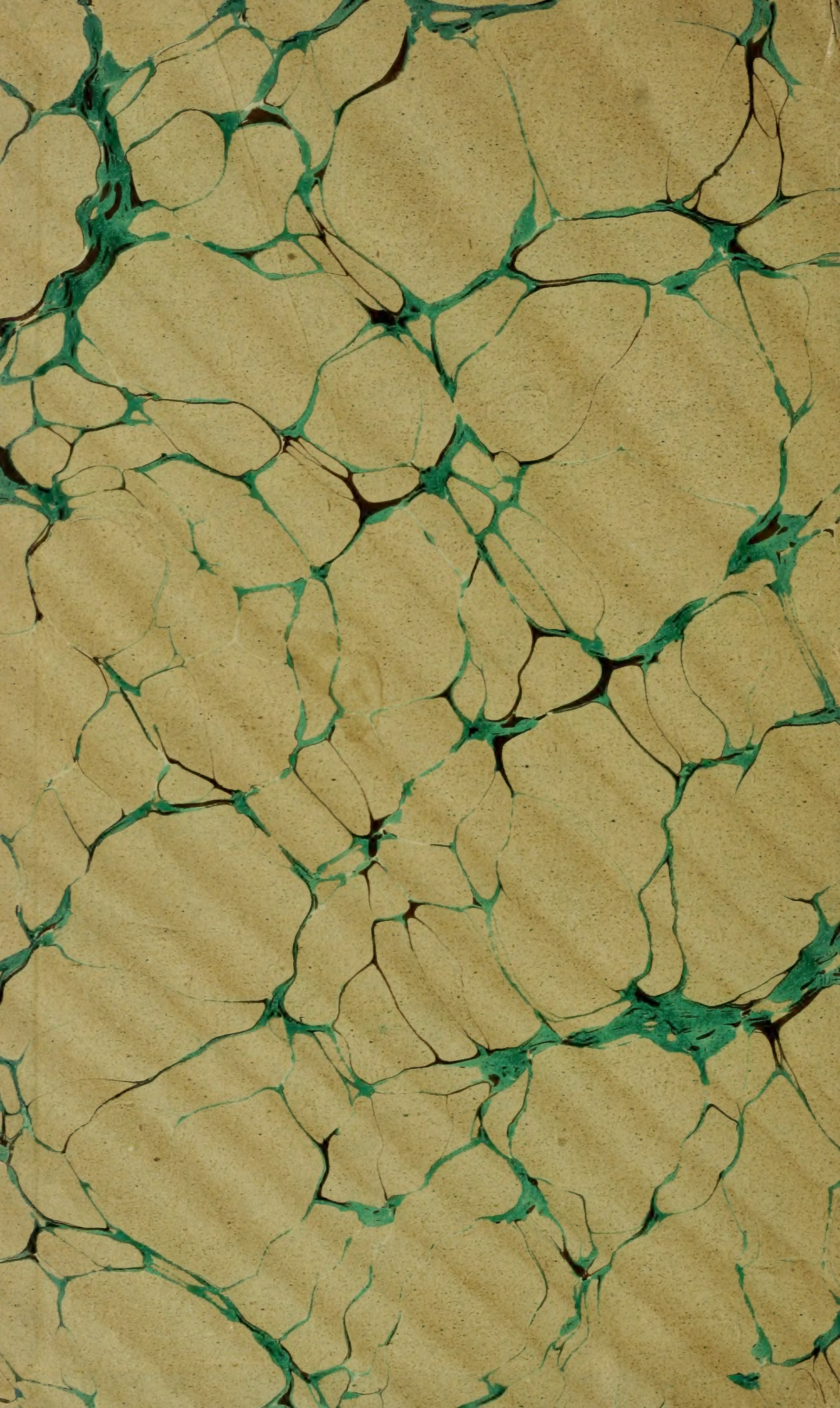
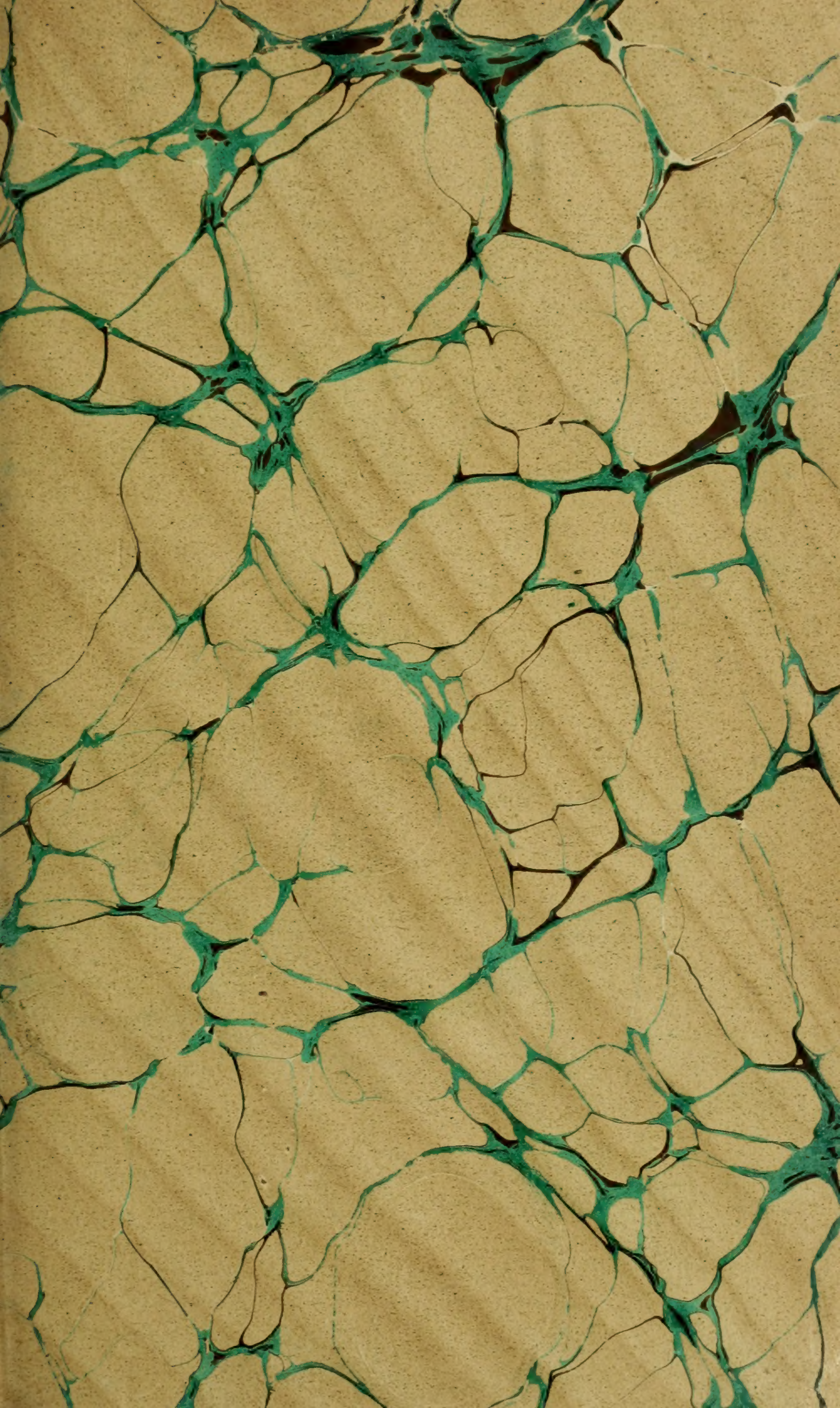






NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1886


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES,
JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME CINQUIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1886

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE POUR CALCULER LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE;

PAR M. L. MALEYX.

En étudiant la méthode inventée par Archimède pour déterminer une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre, j'ai été conduit à faire deux remarques principales.

La première consiste en ce que Archimède, en doublant le nombre des côtés d'un polygone régulier, fait varier à la fois le périmètre du polygone et les diamètres des cercles inscrit et circonscrit; ce fait distingue sa méthode de celle dite *des périmètres*, où l'on suppose que, le périmètre du polygone variant, le rayon du cercle circonscrit reste fixe, et de celle dite *des polygones isopérimètres*, où l'on suppose que le périmètre reste fixe. S'il existe une constante dans sa méthode, cette constante est le côté du polygone, et encore ne l'est-elle pas d'une manière absolue.

La deuxième remarque consiste en ce que l'application de ses principes peut être rendue plus simple que celle des principes des deux autres méthodes que je viens de citer.

J'ai fondé sur ces remarques une étude que je me propose de publier ultérieurement, et dont j'extrais ce qui suit.

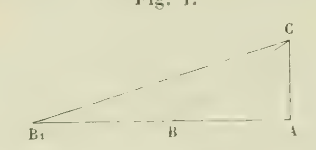
I. *Un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est représenté par* 1, *son hypoténuse par* D *et le second côté par* d, *l'angle opposé au premier côté l'étant par* α; *on se propose de calculer le second côté de l'angle droit* d_1 *et l'hypoténuse* D_1 *d'un second triangle rectangle dont le premier côté est aussi représenté par* 1, *et opposé à un angle égal à* $\frac{\alpha}{2}$.

Soit (*fig.* 1) ABC le premier triangle rectangle dans lequel on a

$$A = 1^{dt},\quad ABC = \alpha,\quad AC = 1,\quad BC = D,\quad AB = d.$$

Pour construire le second, il suffira de prolonger AB de la longueur $BB_1 = BC = D$, et d'unir par une ligne

Fig. 1.



droite le point B_1 au point C; car, le triangle CBB_1 étant isoscèle par construction, on a

$$BB_1C = BCB_1 = \tfrac{1}{2}ABC.$$

On a du reste évidemment

$$AB_1 = d_1 = D + d$$

et, d'après le théorème de Pythagore,

$$B_1C = D_1 = \sqrt{d_1^2 + 1}.$$

II. *Extraction de la racine carrée d'un nombre donné sous la forme* $a^2 + R$, *d'après les données* a *et* R, *et sans effectuer le carré* a^2.

Prenons a pour valeur approchée par défaut de la racine cherchée, et soit $\frac{b}{10^\alpha}$ la valeur aussi approchée par

défaut, et à moins de $\frac{1}{10^\alpha}$ de la partie complémentaire de la racine, on a

$$\left(a + \frac{b}{10^\alpha}\right)^2 \leq (a^2 + R);$$

développant le premier membre et réduisant,

$$2a \times \frac{b}{10^\alpha} + \frac{b^2}{10^{2\alpha}} \leq R,$$

d'où

$$\frac{b}{10^\alpha} < \frac{R}{2a}.$$

Nous pouvons développer le quotient $\frac{R}{2a}$ en fraction décimale, à moins de $\frac{1}{10^\alpha}$ par défaut, et, si $\frac{q}{10^\alpha}$ représente ce développement, R_1 étant le reste de la division, nous aurons

$$R = 2a \times \frac{q}{10^\alpha} + R_1$$

et, en conséquence,

$$\frac{b}{10^\alpha} < \frac{q}{10^\alpha} + \frac{R_1}{2a}, \quad \frac{R_1}{2a} < \frac{1}{10^\alpha}.$$

$\frac{b}{10^\alpha}$, étant un multiple de $\frac{1}{10^\alpha}$ contenu dans le second membre de l'inégalité précédente, ne peut surpasser $\frac{q}{10^\alpha}$, qui est le plus grand multiple de $\frac{1}{10^\alpha}$ contenu dans le même nombre ; $\frac{q}{10^\alpha}$ ne peut donc être que supérieur ou égal à $\frac{b}{10^\alpha}$, et, pour qu'il ne lui soit pas supérieur, il suffit que du nombre donné, $a^2 + R$, on puisse retrancher le carré de $a + \frac{q}{10^\alpha}$, c'est-à-dire qu'on ait l'inégalité

$$\left(a + \frac{q}{10^\alpha}\right)^2 \leq a^2 + R$$

ou

$$2a \times \frac{q}{10^\alpha} + \frac{q^2}{10^{2\alpha}} < R$$

ou encore

$$\frac{q^2}{10^{2\alpha}} < R_1.$$

Si donc on développe le quotient de la division de R par $2a$ en décimales, tant que le carré de la partie trouvée au quotient ne surpassera pas le reste de la division, cette partie sera égale à la partie complémentaire de la racine, à moins d'une unité du dernier ordre, et par défaut.

Supposons que nous nous arrêtions dans la division de R par $2a$ à la partie $\frac{q}{10^\alpha}$ du quotient, $\frac{q^2}{10^{2\alpha}}$ ne surpassant pas le reste R_1 de la division, et désignons par R_2 l'excès de R_1 sur $\frac{q^2}{10^{2\alpha}}$; nous aurons successivement

$$\frac{q^2}{10^{2\alpha}} + R_2 = R_1,$$

$$\frac{q^2}{10^{2\alpha}} + R_2 = R - 2a \times \frac{q}{10^\alpha};$$

d'où, ajoutant aux deux membres $a^2 + 2a \times \frac{q}{10^\alpha}$,

$$\left(a + \frac{q}{10^\alpha}\right)^2 + R_2 = a^2 + R.$$

On pourra alors reprendre le calcul précédent en traitant $a + \frac{q}{10^\alpha}$ et R_2 de la même manière que a et R, et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on ait obtenu une valeur suffisamment approchée de la racine cherchée.

Observations. — On pourra encore abréger le calcul en ne conservant que la partie utile des produits qu'on devra successivement retrancher dans les divisions

qu'on aura à faire, à condition de tenir compte à la fin du calcul des erreurs commises sur ces produits.

III. Pour ne rien laisser à désirer, donnons un exemple de ce calcul : soit à extraire la racine carrée de la somme $(3,732050807568 + \alpha)^2 + 1$, α étant un nombre positif inconnu, mais moindre que $\frac{1}{10^{12}}$. Agissons comme si α était nul, nous en tiendrons compte ultérieurement; commençons la division de 1 par le double de la partie entre parenthèses diminuée de α, ne conservant dans chaque produit que la partie représentant des unités de l'ordre $\frac{1}{10^{15}}$:

```
1,000000000000000 | 7,464101615136
  7464101815136   |---------------
-----------------   0,13
  2535898384864o
  2239230484540 8
  ---------------
   29666790032 32
```

Retranchons du second reste le carré de la partie trouvée au quotient $(0,13)^2 = 0,0169$, puis divisons le résultat de cette soustraction par la somme du diviseur précédent et du double de la partie trouvée au quotient, 0,26 :

```
0,0296667900 3232
0,0169
----------
0,0127667900 32320 | 7,724101615136
     7724101615136 |---------------
   ---------------   0,001652
     5042688417184
     4634460969078
     -------------
      408227448106
      386205080755
      ------------
       22022367351
       15448203230
       -----------
        6574164121
```

Opérons sur le nouveau quotient comme sur le précédent, modifions de même le diviseur et poursuivons :

0,000006574164121
$(0,001652)^2 =$ 0,000002729104

3845060121	7,727405615136
3090962244	0,000000497587
754097877	
695466504	
58631373	
54091835	
4539538	
3863700	
675838	
618192	
57646	
54089	
3557	

Dans les opérations que nous venons d'exécuter, les produits que nous avons successivement retranchés du dividende initial sont trop faibles : il en résulte que le reste final est trop grand de la somme des parties négligées dans chaque produit ; il est facile de former une limite supérieure de la somme de ces parties négligées.

Nous avons d'abord négligé le produit de 2α (partie complémentaire du diviseur) par le nombre formé des trois premiers chiffres des quotients obtenus, soit 0,131 ; cette première partie négligée a une valeur moindre que $0{,}131 \times \frac{2}{10^{12}} = \frac{131 \times 2}{10^{15}}$.

En second lieu, dans chacun des produits suivants, la partie négligée n'atteint pas un nombre d'unités de l'ordre $\frac{1}{10^{15}}$ marqué par le chiffre employé au multiplicateur ; donc la somme des parties négligées n'atteint

pas le produit

$$\frac{1}{10^{15}} \times (131 \times 2 + 6 + 5 + 2 + 4 + 9 + 7 + 5 + 8 + 7),$$

et, si nous désignons cette somme par E, nous aurons

$$E < \frac{315}{10^{15}}.$$

De là résulte que, si nous désignons par R le reste final exact, nous avons les inégalités

$$\frac{3557 - 315}{10^{15}} = \frac{3242}{10^{15}} < R < \frac{3557}{10^{15}}.$$

Le dernier quotient trouvé ne pourrait être que trop grand, puisque nous avons opéré sur des dividendes trop grands, et il ne l'est pas, en tant que quotient, puisque son produit par le diviseur retranché du dividende fournit le reste R qui est positif; il n'est pas trop grand non plus, en tant que partie complémentaire de la racine, puisque son carré est inférieur à $\frac{25}{10^{14}}$ qui est lui-même certainement inférieur à R.

Donc la partie complémentaire de la racine carrée cherchée est, à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut,

$$0,131652497587,$$

et la racine carrée est elle-même :

$$3,863703305155,$$

à moins de $\frac{2}{10^{12}}$ par défaut.

IV. L'exemple sur lequel nous venons d'appliquer le procédé d'extraction de la racine carrée exposé au n° II n'a pas été pris au hasard; si dans le triangle rec-

tangle ABC, considéré au n° I, nous supposons

$$BC = D = 2,$$

nous aurons

$$AB = d = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \alpha = 30°.$$

Or $\sqrt{3}$ est égale à $1,732050807568$, à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut; dès lors, et par application des formules du n° I, nous aurons, en partant des données,

$D = 2,$

$d = \sqrt{3} = 1,732050807568$ à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut,

$d_1 = \quad 3,732050807568 \quad$ » $\quad \frac{1}{10^{12}} \quad$ »

$D_1 = \quad 3,863703305155 \quad$ » $\quad \frac{2}{10^{12}} \quad$ »

l'angle compris entre D_1 et d_1 étant de 15°.

On voit du reste immédiatement, en unissant le point A au point milieu de BC, ou à celui de B_1C, que D et d sont les diamètres des cercles circonscrit ou inscrit à l'hexagone régulier dont le côté est 1, et que D_1 et d_1 sont les diamètres des cercles circonscrit et inscrit au dodécagone régulier ayant aussi pour côté 1.

Reprenant deux fois le même calcul à partir de D_1 et d_1, nous nous procurerons de même les diamètres D_2 et d_2, D_3 et d_3, des cercles circonscrit et inscrit aux polygones réguliers de vingt-quatre et quarante-huit côtés, respectivement, et ayant chacun pour côté 1.

V. Les détails dans lesquels nous sommes entrés à l'occasion de ces calculs, dans le n° III, doivent nous dispenser de les rapporter *in extenso :* nous n'en donnerons donc que les résultats.

Toutefois, avant de les inscrire, nous ferons la re-

marque suivante, qui nous conduira à une notation utile : on voit que, dans chaque calcul, tel que celui du n° III, on ne fait que déterminer la différence qui existe entre les diamètres des cercles circonscrit et inscrit à un même polygone régulier dont le côté est 1; nous désignerons donc, d'une façon générale, par D_k et d_k les diamètres des cercles circonscrit et inscrit au polygone régulier dont le côté est 1, et dont le nombre des côtés est 6×2^k, et par Δ_k la différence $D_k - d_k$.

Cela posé, les résultats trouvés sont caractérisés par les égalités suivantes :

$d_2 = D_1 + d_1 =$	7,595754112723	à moins de	$\frac{3}{10^{12}}$	par défaut.
$\Delta_2 =$	0,065543462815	»	$\frac{1}{10^{12}}$	»
$D_2 = d_2 + \Delta_2 =$	7,661297575538	»	$\frac{4}{10^{12}}$	»
$d_3 = D_2 + d_2 =$	15,257051688261	»	$\frac{7}{10^{12}}$	»
$\Delta_3 =$	0,032736610412	»	$\frac{1}{10^{12}}$	»
$D_3 = d_3 + \Delta_3 =$	15,289788298673	»	$\frac{8}{10^{12}}$	»

VI. La partie la plus pénible de ces calculs est évidemment la détermination des nombres Δ : aussi est-on conduit à rechercher s'il n'existe pas quelque propriété géométrique de la figure qui nous permette d'atteindre plus facilement ce résultat.

Reprenons la figure du n° I et ajoutons y la circonférence décrite de B comme centre avec $BC = D$ pour rayon, elle coupe AB en B_1 et en E, joignons CE par une ligne droite; conservant les notations des numéros précédents, nous aurons

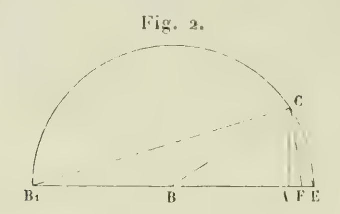
$$BE - BA = D - d = AE = \Delta.$$

Dans le triangle ACE (*fig.* 2), l'angle ACE est égal à l'angle

$$BB_1C = \frac{\alpha}{2},$$

car ils ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et sont tous les deux aigus; donc, pour avoir la diffé-

Fig. 2.



rence $AE = \Delta$, il suffira de construire CE faisant avec CA l'angle $ACE = \frac{1}{2}ABC$; de même, pour avoir la différence

$$AF = B_1C - B_1A = D_1 - d_1 = \Delta_1,$$

il suffira de construire la droite CF faisant avec CA l'angle $ACF = \frac{1}{2}AB_1C$. On conclut de cette construction que CF est bissectrice de l'angle ACE et de la propriété connue de cette droite, l'égalité de rapports

$$\frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_1} = \frac{CE}{CA} = \sqrt{\Delta^2 + 1}.$$

Élevons les deux membres au carré et ramenons à la forme entière

$$\Delta^2 - 2\Delta\Delta_1 + \Delta_1^2 = \Delta_1^2(\Delta^2 + 1).$$

Réduisant et transposant,

$$\Delta\Delta_1^2 + 2\Delta_1 - \Delta = 0.$$

Cette équation du second degré définit Δ_1 au moyen de Δ par sa racine positive; mais, comme Δ a généralement une petite valeur, on peut calculer Δ_1 au moyen

d'une suite d'inégalités que nous allons déduire de l'équation même, et sans extraction de racine carrée.

Nous pouvons donner à l'équation précédente la forme

$$(1) \qquad \Delta_1 = \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta\Delta_1^2;$$

d'où l'inégalité évidente

$$\Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Remplaçons dans l'équation (1), et au second membre seulement, Δ_1 par le nombre plus grand $\frac{1}{2}\Delta$; nous aurons

$$\Delta_1 > \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3.$$

Ainsi, en prenant pour valeur approchée par excès de Δ_1 la valeur $\frac{1}{2}\Delta$, l'erreur commise a pour limite supérieure $\frac{1}{8}\Delta^3$.

Si nous remplaçons maintenant au second membre de l'équation (1) Δ_1 par le nombre plus petit $\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^3$, nous aurons, en négligeant un terme soustractif, ce qui ne fait qu'augmenter l'inégalité,

$$\Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 + \tfrac{1}{16}\Delta^5.$$

Dès lors, en prenant pour valeur approchée par défaut de Δ_1 la différence $\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^3$, l'erreur commise sera inférieure à $\frac{1}{16}\Delta^5$.

Enfin, en substituant à Δ_1 dans le second membre de l'équation (1) la valeur trop grande $\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^3 + \frac{1}{16}\Delta^5$, nous aurons, en négligeant des termes dont la somme est certainement positive,

$$\Delta_1 > \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 + \tfrac{1}{16}\Delta^5 - \tfrac{5}{16}\Delta^7;$$

d'où l'on conclut que si, dans la suite

$$\tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 + \tfrac{1}{16}\Delta^5 - \tfrac{5}{16}\Delta^7,$$

on prend un, deux ou trois termes comme valeur ap-

prochée de Δ_1, cette valeur est approchée par excès ou par défaut suivant qu'on s'arrête à un terme affecté du signe + ou du signe —, et que, dans tous les cas, la valeur absolue du premier terme négligé est limite supérieure de l'erreur commise.

Ces inégalités permettent de calculer un des nombres Δ au moyen du précédent avec une assez grande approximation : on pourrait même l'obtenir avec une approximation illimitée par l'emploi de l'égalité (1) et par la méthode des approximations successives ; mais leur emploi est encore pénible, eu égard aux multiplications à faire : aussi ne ferons-nous usage dans ce qui suit que des inégalités

$$\tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 < \Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta,$$

et nous allons nous occuper d'établir des formules se déduisant de l'équation (1) et permettant d'arriver au même résultat au moyen d'opérations plus simples.

VII. Reprenons l'égalité initiale réduite du n° VI

$$(1) \qquad \Delta - 2\Delta_1 - \Delta\Delta_1^2 = 0,$$

d'où

$$(1)' \qquad \Delta = \frac{2\Delta_1}{1 - \Delta_1^2}.$$

Appliquons-la aux différences d'ordre supérieur de une unité

$$(2) \qquad \Delta_1 - 2\Delta_2 - \Delta_1\Delta_2^2 = 0,$$

d'où

$$(2)' \qquad \Delta_1 = \frac{2\Delta_2}{1 - \Delta_2^2}.$$

Δ étant peu différent de $2\Delta_1$, et Δ_1 l'étant peu de $2\Delta_2$, la valeur numérique du dernier terme du premier

membre de l'égalité (1) est sensiblement égale à huit fois celle du terme correspondant de l'égalité (2); retranchant les égalités (1) et (2) membre à membre après avoir multiplié la seconde par 8, on a

$$(3)\qquad \Delta - 10\Delta_1 + 16\Delta_2 - \Delta_1(\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2) = 0.$$

Transformons le dernier terme du premier membre de l'égalité (3); si nous multiplions membre à membre l'égalité $(1)'$ et l'égalité obtenue en élevant au carré les deux membres de l'égalité $(2)'$, nous aurons

$$\Delta\Delta_1 = \frac{8\Delta_2^2}{(1-\Delta_1^2)(1-\Delta_2^2)^2}.$$

Remplaçons au dénominateur Δ_1 par sa valeur tirée de l'égalité $(2)'$

$$\Delta\Delta_1 = \frac{8\Delta_2^2}{(1-\Delta_2^2)^2 - 4\Delta_2^2}.$$

De là on déduit

$$\begin{aligned}\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2 &= 8\Delta_2^2\left[\frac{1}{(1-\Delta_2^2)^2 - 4\Delta_2^2} - 1\right]\\ &= 8\Delta_2^2 \times \frac{6\Delta_2^2 - \Delta_2^4}{(1-\Delta_2^2)^2 - 4\Delta_2^2}.\end{aligned}$$

En substituant au dénominateur $\frac{2\Delta_2}{\Delta_1}$ à $1-\Delta_2^2$ qui lui est égal, d'après l'égalité $(2)'$,

$$\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2 = 8\Delta_2^2 \times \frac{6\Delta_2^2 - \Delta_2^4}{\frac{4\Delta_2^2}{\Delta_1^2} - 4\Delta_2^2} = 8\Delta_2^2\Delta_1^2 \times \frac{6-\Delta_2^2}{4(1-\Delta_1^2)}.$$

Remplaçons enfin au dénominateur de la dernière fraction $1-\Delta_1^2$ par sa valeur $\frac{2\Delta_1}{\Delta}$ déduite de l'égalité $(1)'$, on a, après réduction,

$$\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2 = \Delta\Delta_1\Delta_2^2(6-\Delta_2^2):$$

d'où, reportant dans l'égalité (3), on a

$$(\alpha)\qquad \Delta - 10\Delta_1 + 16\Delta_2 - \Delta\Delta_1^2\Delta_2^2(6-\Delta_2^2) = 0.$$

De l'égalité (a) on peut déduire

$$\Delta_2 = \frac{1}{16}(10\Delta_1 - \Delta) + \frac{(6 - \Delta_2^2)\Delta\Delta_1^2\Delta_2^2}{16}.$$

Le premier terme du second membre fournit une valeur approchée par défaut de Δ_2, et le second terme qui représente l'erreur est moindre que

$$\frac{6\Delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\left(\frac{\Delta}{4}\right)^2}{16} = \frac{3}{512}\Delta^5 < \frac{\Delta^5}{170}.$$

VIII. Reprenons encore l'égalité (a) du numéro précédent, et appliquons-la aux différences d'indice supérieur d'une unité :

$$(a) \qquad \Delta - 10\Delta_1 + 16\Delta_2 - \Delta\Delta_1^2\Delta_2^2(6 - \Delta_2^2) = 0,$$

$$(b) \qquad \Delta_1 - 10\Delta_2 + 16\Delta_3 - \Delta_1\Delta_2^2\Delta_3^2(6 - \Delta_3^2) = 0.$$

Retranchons membre à membre de l'égalité (a) l'égalité (b) dont les deux membres ont été précédemment multipliés par 32 ; on en déduit

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta - 42\Delta_1 - 336\Delta_2 - 512\Delta_3 \\ &\quad - \Delta_1\Delta_2^2[\Delta\Delta_1(6 - \Delta_2^2) - 32\Delta_3^2(6 - \Delta_3^2)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous allons réduire la parenthèse du dernier terme de l'égalité (c) en l'exprimant d'abord au moyen de Δ_3 ; nous avons trouvé dans le numéro précédent l'expression du produit $\Delta\Delta_1$ au moyen de Δ_2 ; on en déduit, en tenant compte de l'égalité $\Delta_2 = \frac{2\Delta_3}{1 - \Delta_3^2}$,

$$\Delta\Delta_1(6 - \Delta_2^2) = \frac{8\Delta_2^2(6 - \Delta_2^2)}{(1 - \Delta_2^2)^2 - 4\Delta_2^2}$$

$$= \frac{\frac{32\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}\left[6 - \frac{4\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}\right]}{\left[1 - \frac{4\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}\right]^2 - \frac{16\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}}$$

$$= \frac{32\Delta_3^2[6(1 - \Delta_3^2)^2 - 4\Delta_3^2]}{[(1 - \Delta_3^2)^2 - 4\Delta_3^2]^2 - 16\Delta_3^2(1 - \Delta_3^2)^2}.$$

La parenthèse du dernier terme de l'égalité (c) peut alors, par substitution de la valeur précédente, s'écrire sous la forme

$$\frac{32\Delta_3^2}{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2} \times \{16(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2-(6-\Delta_3^2)\}\{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2\}$$

Effectuons les calculs indiqués dans la parenthèse; l'expression précédente devient

$$\frac{32\Delta_3^2}{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2} \times \Delta_3^2(153-442\Delta_3^2+238\Delta_3^4-34\Delta_3^6+\Delta_3^8).$$

Transformons actuellement le facteur fractionnaire en remplaçant dans son dénominateur $(1-\Delta_3^2)$ par la quantité égale $\frac{2\Delta_3}{\Delta_2}$, on trouve

$$\frac{32\Delta_3^2}{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2} = \frac{32\Delta_3^2}{\left(\frac{4\Delta_3^2}{\Delta_2^2}-4\Delta_3^2\right)^2-16\Delta_3^2\times\frac{4\Delta_3^2}{\Delta_2^2}} = \frac{2\Delta_2^4}{\Delta_3^2[(1-\Delta_2^2)^2-4\Delta_2^2]}.$$

Remplaçons de nouveau $(1-\Delta_2^2)$ par la fraction égale $\frac{2\Delta_2}{\Delta_1}$; nous trouvons, pour valeur du facteur fractionnaire,

$$\frac{2\Delta_2^4}{\Delta_3^2[(1-\Delta_2^2)^2-4\Delta_2^2]} = \frac{2\Delta_2^4}{\Delta_3^2\left(\frac{4\Delta_2^2}{\Delta_1^2}-4\Delta_2^2\right)} = \frac{\Delta_2^2\times\Delta_1^2}{2\Delta_3^2(1-\Delta_1^2)}.$$

Substituons enfin à $1-\Delta_1^2$ la valeur égale $\frac{2\Delta_1}{\Delta}$

$$\frac{\Delta_2^2\times\Delta_1^2}{2\Delta_3^2(1-\Delta_1^2)} = \frac{\Delta\Delta_1\Delta_2^2}{4\Delta_3^2}.$$

Il en résulte que la parenthèse du dernier terme de l'égalité (c) peut s'écrire

$$\frac{\Delta\Delta_1\Delta_2^2}{4}(153 - 442\Delta_3^2 + 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 + \Delta_3^8),$$

et qu'enfin l'égalité (c) peut prendre la forme

$$(d)\quad \begin{cases} \Delta - 42\Delta_1 + 336\Delta_2 - 512\Delta_3 \\ \quad - \dfrac{\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{4}(153 - 442\Delta_3^2 + 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 + \Delta_3^8) = 0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\Delta_3 = \frac{1}{512}[(8\Delta_2 - \Delta_1) \times 42 + \Delta]$$
$$- \frac{\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{2048}(153 - 442\Delta_3^2 + 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 + \Delta_3^8).$$

Comme la parenthèse du second terme du second membre est évidemment positive pour les valeurs de Δ_3 qui ne surpassent pas $\sqrt{\frac{153}{442}}$ et à plus forte raison $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{153}{442}}$; que de plus, pour les mêmes valeurs de Δ_3, cette parenthèse a une valeur inférieure à 153, il en résulte que le premier terme du second membre peut être pris comme valeur approchée par excès de Δ_3, et que l'erreur commise est moindre que la fraction $\frac{153\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{2048}$, qui admet elle-même, comme limite supérieure, $\frac{153\Delta^7}{2048 \times 2^{10}} = \frac{153\Delta^7}{2^{21}}$.

IX. Les formules établies aux nos VI, VII et VIII, prises sous les formes

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta\Delta_1^2,$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{16}(10\Delta_1 - \Delta) + \frac{(6 - \Delta_2^2)\Delta.\Delta_1^2.\Delta_2^2}{16},$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{512}[(8\Delta_2 - \Delta_1) \times 42 + \Delta]$$
$$- \frac{\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{2048}(153 - 442\Delta_3^2 + 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 + \Delta_3^8).$$

permettent de calculer une des valeurs Δ au moyen de la précédente, ou des deux ou trois précédentes, avec une approximation indéfinie, à l'aide de la méthode des approximations successives, et cela indépendamment des valeurs de D et d.

On pourrait encore les appliquer en suivant des méthodes diverses pour obtenir des valeurs approchées de l'inconnue, mais le procédé qui nous paraît le plus avantageux, et celui que nous allons appliquer, consiste à prendre pour valeur approchée du premier membre le premier terme du second ; nous éviterons ainsi l'emploi des logarithmes, et nous obtiendrons une approximation suffisante, pourvu que Δ soit assez petit.

Nous avons déjà trouvé directement, aux n°s III et V, les valeurs

$$\Delta_1 = 0,131652497587\ldots,$$
$$\Delta_2 = 0,065543462815\ldots,$$
$$\Delta_3 = 0,032736610412\ldots,$$

chacune de ces valeurs étant approchée à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut.

En acceptant comme valeur approchée par excès de Δ_4 $\frac{1}{512}[(8\Delta_3 - \Delta_2) \times 42 + \Delta_1]$, l'erreur sera, d'après la fin du n° VIII, inférieure à $\frac{153 \times 132^7}{2^{21} \times 10^{21}}$.

Mais on a évidemment les égalités ou inégalités suivantes :

$$\frac{153 \times 132^7}{2^{21} \times 10^{21}} = \frac{153 \times 33^7}{2^7 \times 10^{21}}$$
$$= 153 \times \left(\frac{33}{100}\right)^7 \times \frac{1}{2^7 \times 10^7} < 153 \times \frac{1}{3^7} \times \frac{1}{2^7 \times 10^7}$$
$$= \frac{17}{3^5 \times 2^7 \times 10^7} < \frac{55}{10^{12}}.$$

Si nous faisons le calcul de

$$\frac{1}{512}[(8\Delta_3 - \Delta_2) \times 42 + \Delta_1],$$

en prenant les valeurs approchées que nous avons trouvées pour Δ_1, Δ_2, Δ_3, la première et la dernière par excès, la seconde par défaut, nous aurons pour valeur approchée par excès 0,0163639 22185, quotient décimal approché à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par excès; du reste, l'erreur commise en remplaçant Δ_1, Δ_2, Δ_3 par leurs valeurs approchées n'atteint pas

$$\frac{1}{10^{12}} \times \frac{1}{512} \times (336 + 42 + 1) < \frac{1}{10^{12}},$$

d'où résulte qu'on peut prendre le quotient

$$0,016363922185$$

comme valeur approchée par excès de Δ_4 à moins de $\frac{57}{10^{12}}$, et le nombre 0,016363922128 comme valeur approchée par défaut du même nombre, avec la même limite d'erreur.

Si actuellement nous répétons des calculs analogues pour trouver une valeur approchée de Δ_5 au moyen de Δ_2, Δ_3, Δ_4, en observant que la limite supérieure du terme négligé, à savoir $\frac{153\,\Delta_2\,\Delta_3^2\,\Delta_4^4}{2048}$, est moindre que le $\frac{1}{128}$ de celle du terme négligé dans le calcul précédent, puisque Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont respectivement moindres que les moitiés de Δ_1, Δ_2, Δ_3, et qu'en conséquence ce terme négligé est moindre que $\frac{55}{10^{14}}$; que, de plus, l'erreur commise en substituant à Δ_2, Δ_3, Δ_4 leurs valeurs approchées, et en développant le quotient en fraction décimale à moins de $\frac{1}{10^{12}}$, par excès, est moindre que

$$\frac{1}{10^{12}} \times \frac{1}{512} \times (336 \times 57 + 42 + 1) + \frac{1}{10^{12}} < \frac{39}{10^{12}},$$

nous en conclurons qu'on peut prendre comme valeur approchée de Δ_5 par excès et à moins de $\frac{40}{10^{12}}$ le nombre 0,0081813437, et comme valeur approchée de Δ_5 par défaut et avec la même approximation le nombre

$$0{,}0081813397;$$

d'où

$$0{,}016363922128 < \Delta_4 < 0{,}016363922185,$$
$$0{,}0081813397 < \Delta_5 < 0{,}0081813437.$$

X. Les valeurs de Δ auxquelles nous sommes actuellement parvenus sont suffisamment petites pour que nous puissions faire usage de la formule établie au n° VII pour obtenir les valeurs consécutives de Δ; nous accepterons donc, comme valeur approchée par défaut de Δ_6, $\frac{1}{16}(10\,\Delta_5 - \Delta_4)$, et nous avons vu à la fin du n° VII que la limite de l'erreur commise était $\frac{\Delta_4^5}{170} < \frac{8}{10^{12}}$. Calculons $\frac{1}{16}(10\Delta_5 - \Delta_4)$, par défaut, en prenant Δ_5 par défaut et Δ_4 par excès; la limite de l'erreur commise sera $\frac{1}{16}(10 \times 40 + 57) \times \frac{1}{10^{12}}$, moindre que $\frac{29}{10^{12}}$. Il résulte de là que la valeur approchée par défaut et à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ de

$$\frac{1}{16}(0{,}081814133970 - 0{,}016363922185)$$

est aussi approchée par défaut de Δ_6 à moins de $\frac{38}{10^{12}}$; d'où

$$0{,}004090638236 < \Delta_6 < 0{,}004090638274.$$

On trouve de même, par l'emploi réitéré de la même formule et en prenant les mêmes précautions relatives à l'approximation,

$$0{,}002045310557 < \Delta_7 < 0{,}002045310586,$$
$$0{,}001022654206 < \Delta_8 < 0{,}001022654229.$$

Nous avons ainsi trouvé des valeurs approchées de Δ_6 à moins de $\frac{38}{10^{12}}$, de Δ_7 à moins de $\frac{29}{10^{12}}$ et de Δ_8 à moins de $\frac{23}{10^{12}}$.

Δ_8 est assez petit, comme nous allons le voir, pour que nous puissions tirer tout le parti possible des nombres que nous avons calculés, en tenant compte des erreurs qui les affectent.

XI. Nous avons posé au n° V $\Delta_k = D_k - d_k$, nous avons du reste vu, d'après le n° I, que

$$d_{k+1} = D_k + d_k ;$$

on en déduit

$$d_{k+1} = 2\,d_k + \Delta_k.$$

Faisant varier k, on trouve

$$d_4 = 2\,d_3 \quad + \Delta_3,$$
$$d_5 = 2\,d_4 \quad + \Delta_4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d_p = 2\,d_{p-1} + \Delta_{p-1}.$$

Multipliant ces égalités par les puissances décroissantes de 2 à partir de 2^{p-4}, on trouve, en les ajoutant membre à membre,

$$(1) \qquad d_p = 2^{p-3}\,d_3 + 2^{p-4}\,\Delta_3 + 2^{p-5}\,\Delta_4 + \dots + 2\,\Delta_{p-2} + \Delta_{p-1}.$$

Si nous posons $p = 8$, nous aurons

$$(2) \qquad d_8 = 2^5\,d_3 + 2^4\,\Delta_3 + 2^3\,\Delta_4 + 2^2\,\Delta_5 - 2\,\Delta_6 + \Delta_7.$$

Remplaçons dans cette égalité (2) d_3, Δ_3, Δ_4, ..., Δ_7, par les valeurs approchées par défaut que nous en avons trouvées, nous aurons une valeur approchée par défaut de d_8, et la limite supérieure de l'erreur commise sur d_8 s'obtiendra en remplaçant au second membre de l'éga-

lité (2) d_3, Δ_3, ... Δ_7, chacun par la limite supérieure de l'erreur commise sur ce nombre.

Nous rapportons ci-dessous le Tableau de ce calcul, en observant que nous n'écrivons que le numérateur de la limite supérieure de chaque erreur, tous ces nombres ayant pour dénominateur commun 10^{12}.

Sur une ligne horizontale nous écrivons séparément la valeur approchée par défaut de d_3 et le numérateur de la limite de l'erreur commise sur ce nombre. Nous multiplions ces deux nombres par 2; les produits sont placés sur la seconde ligne horizontale. A ces produits nous ajoutons respectivement la valeur approchée par défaut de Δ_3, et le numérateur de la limite de l'erreur commise sur Δ_3; nous multiplions les sommes par 2, et nous continuons de même jusqu'à ce que nous ayons fait l'addition de la valeur approchée par défaut de Δ_7 et du numérateur de la limite de l'erreur correspondante.

15,257051688261	7
30,514103376522	14
32736610412	1
30,546839986934	15
61,093679973868	30
16363922128	57
61,110043895996	87
122,220087791992	174
8181413397	40
122,228269205389	214
244,456538410778	428
4090638236	38
244,460629049014	466
488,921258098028	932
2045310557	29
488,923303408585	961

De là nous pouvons conclure que d_8 admet pour valeur

approchée par défaut 488,9233034085585, et que la limite supérieure de l'erreur est $\frac{961}{10^{12}}$.

XII. Par le procédé employé au n° XI, on trouve l'égalité

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d_{p+n} = 2^n d_p + 2^{n-1}\Delta_p + 2^{n-2}\Delta_{p+1} + \ldots \\ + 2\Delta_{p+n-2} + \Delta_{p+n-1}. \end{aligned}\right.$$

Si k est le nombre des côtés du polygone admettant pour diamètre du cercle inscrit d_p, d_{p+n} est le diamètre du cercle inscrit dans le polygone dont le nombre des côtés est $k \times 2^n$, et dont le périmètre est aussi représenté par $k \times 2^n$; nous pouvons en conclure, d'après l'égalité des rapports des périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés à celui des diamètres des cercles qui leur sont respectivement inscrits, que $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ est le diamètre du cercle inscrit, dans le polygone régulier dont le nombre des côtés est $k \times 2^n$ et dont le périmètre est k.

Divisant les deux membres de la dernière égalité (1) par 2^n, on en déduit

$$\frac{d_{p+n}}{2^n} = d_p + \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{2^2}\Delta_{p+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-1}.$$

On trouve de même, pour le diamètre du cercle circonscrit au même polygone,

$$\frac{D_{p+n}}{2^n} = d_p + \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{2^2}\Delta_{p+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-1} + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n}.$$

On voit facilement, d'après ces égalités, que $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ croît avec n, tandis que $\frac{D_{p+n}}{2^n}$ décroît dans les mêmes circonstances, tout en restant supérieur à $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ d'une

quantité qui a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment; du reste, $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ et $\frac{D_{p+n}}{2^n}$ comprennent entre eux le diamètre de la circonférence dont la longueur est k; on peut donc considérer le diamètre de cette circonférence dont la longueur est k comme la limite vers laquelle tend $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ quand n augmente au delà de toute limite, et nous poserons

$$\theta = \lim \frac{d_{p+n}}{2^n}.$$

XIII. D'après les inégalités établies au n° VI, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{lllll}
\Delta_p & & = \Delta_p & = \Delta_p, \\
\frac{1}{2}\Delta_p & -\frac{1}{8}\Delta_p^3 & < \Delta_{p+1} & < \frac{1}{2}\Delta_p, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+1} & -\frac{1}{8}\Delta_{p+1}^3 & < \Delta_{p+2} & < \frac{1}{2}\Delta_{p+1}, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+2} & -\frac{1}{8}\Delta_{p+2}^3 & < \Delta_{p+3} & < \frac{1}{2}\Delta_{p+2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+n-2} & -\frac{1}{8}\Delta_{p+n-2}^3 & < \Delta_{p+n-1} & < \frac{1}{2}\Delta_{p+n-2}, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+n-1} & -\frac{1}{2}\Delta_{p+n-1} & = 0 & = \frac{1}{2}\Delta_{p+n-1} - \frac{1}{2}\Delta_{p+n-1}.
\end{array}$$

Multiplions les nombres écrits dans chaque ligne horizontale par une puissance de $\frac{1}{2}$ dont l'exposant soit égal au rang de la ligne correspondante, et ajoutons membre à membre ces deux séries d'inégalités; on trouve, en posant, pour abréger,

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{2^2}\Delta_{p+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-1},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^2}\Delta_p^3 + \frac{1}{2^3}\Delta_{p+1}^3 + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-2}^3\right),$$

$$\frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1} - \Sigma' < \Sigma < \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1}.$$

Observons actuellement que les termes contenus dans la parenthèse qui donne la valeur de Σ' sont, toujours

d'après les inégalités du n° VI, respectivement moindres que les termes de même rang de la progression géométrique décroissante

$$\frac{1}{2^2}\Delta_p^3,\quad \frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2^3}\Delta_p^3,\quad \frac{1}{2^4}\times\frac{1}{(2^2)^3}\Delta_p^3,$$
$$\frac{1}{2^5}\times\frac{1}{(2^3)^3}\Delta_p^3,\quad \ldots,\quad \frac{1}{2^n}\times\frac{1}{(2^{n-2})^3}\Delta_p^3;$$

il en résultera que Σ' est inférieur au $\frac{1}{8}$ de la limite de la somme des termes de cette progression, soit à

$$\frac{1}{8}\Delta_p^3\times\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^4}} = \frac{\Delta_p^3}{2(2^4-1)}.$$

Dès lors, remplaçant Σ' par une quantité plus grande, nous aurons

$$\frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1} - \frac{\Delta_p^3}{2(2^4-1)}$$
$$< \Sigma < \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1},$$

ou

$$\frac{1}{2}\Delta_p - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1} - \frac{\Delta_p^3}{2(2^4-1)} < \frac{3}{4}\Sigma < \frac{1}{2}\Delta_p - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1}.$$

Ces inégalités, ayant lieu quel que soit n, auront lieu si on le fait croître au de là de toute limite, et comme, dans ces conditions,

$$\lim\Sigma = \Theta - d_p,\qquad \lim\Delta_{p+n-1} = 0,$$

nous trouverons par cette hypothèse

$$\frac{1}{2}\Delta_p - \frac{\Delta_p^3}{2\times(2^4-1)} < \frac{3}{4}(\Theta - d_p) < \frac{1}{2}\Delta_p,$$

d'où

$$d_p + \frac{2}{3}\Delta_p - \frac{2}{3}\frac{\Delta_p^3}{15} < \Theta < d_p + \frac{2}{3}\Delta_p.$$

On peut donc accepter comme valeur approchée par excès du diamètre de la circonférence dont la longueur est k

$$d_p + \tfrac{2}{3}\Delta_p,$$

et comme limite de l'erreur commise $\frac{2}{3}\,\frac{\Delta_p^3}{15}$.

XIV. Nous reportant au n° XI, le nombre des côtés du polygone régulier, dont le cercle inscrit admet pour diamètre d_8, est

$$6 \times 2^8 = 1536,$$

nous pouvons donc déduire du numéro précédent que

$$d_8 + \tfrac{2}{3}\Delta_8$$

représente par excès le diamètre de la circonférence dont la longueur est représentée par 1536.

D'après les valeurs numériques trouvées pour d_8 et Δ_8, et tenant compte des erreurs dont elles sont affectées, on trouve dans ce cas particulier

$$\Theta < 488{,}923985179032;$$

la limite de l'erreur commise sur Θ est

$$\frac{1037}{10^{12}}.$$

Le quotient à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut de 1536 par

$$488{,}923985179032$$

est

$$3{,}141592653585.$$

On peut prendre pour limite de l'erreur commise sur le quotient $\frac{3{,}2 \times 1037}{488{,}9 \times 10^{12}} < \frac{7}{10^{12}}$, d'où

$$3{,}141592653585 < \pi < 3{,}141592653593.$$

3,141592653593 est donc approché de π à moins de $\frac{5}{10^{12}}$ sans qu'on connaisse le sens de l'approximation.

On trouverait $\frac{1}{\pi}$ en divisant Θ par 1536.

NOTE SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE A m VARIABLES EN UNE SOMME DE $m-n$ CARRÉS;

Par M. BENOIT.

On sait que, pour exprimer qu'une forme quadratique à m variables peut se décomposer en une somme de $m-n$ carrés, il faut écrire que tous les déterminants mineurs de l'ordre $n-1$ de son discriminant sont nuls; mais les équations ainsi obtenues ne sont pas distinctes : je vais chercher quelles sont celles d'entre elles dont les autres sont des conséquences.

Soit d'abord le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^m \\ a_2^1 & \ldots & \ldots & a_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^1 & \ldots & \ldots & a_m^m \end{vmatrix}.$$

Considérons l'un des mineurs de l'ordre n différent de zéro, soit

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{m-n} \\ a_2^1 & \ldots & \ldots & a_2^{m-n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-n}^1 & \ldots & \ldots & a_{m-n}^{m-n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

et formons le déterminant suivant

$$D_j^i = \left|\begin{array}{ccccc} a_1^1 & .. & ... & a_1^{m-n} & a_1^i \\ .. & .. & ... & ..... & a_2^i \\ .. & .. & ... & ..... & .. \\ a_{m-n}^1 & .. & ... & a_{m-n}^{m-n} & a_{m-n}^i \\ a_j^1 & a_j^2 & ... & ..... & a_j^i \end{array}\right|,$$

dans lequel i et j peuvent prendre les n valeurs $m-n+1, \ldots, m$.

Posons

$$D_j^{m-n+1} = 0, \qquad D_j^{m-n+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad D_j^m = 0.$$

Je dis qu'il résulte de ces équations que tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ formés au moyen des éléments des $m-n$ premières lignes et de la ligne de rang j sont nuls. En effet, désignons par $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{m-n}^i, A_j^i$ les coefficients des éléments $a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{m-n}^i, a_j^i$ du développement de D_j^i par rapport à la dernière colonne, et soit

$$\begin{array}{c} a_1^p \\ a_2^p \\ .. \\ a_{m-n}^p \\ a_j^p \end{array}$$

l'une quelconque des colonnes des déterminants en question, p pouvant prendre toutes les valeurs suivantes $1, 2, \ldots, m$. On aura, quel que soit p,

$$A_1^i a_1^p + A_2^i a_2^p + \ldots + A_{m-n}^i a_{m-n}^p + A_j^i a_j = 0;$$

car le premier membre de cette équation n'est autre chose que le déterminant D_j^i, où la dernière colonne est remplacée par celle que nous avons considérée plus haut. Pour les valeurs de p plus petites que $m-n$ ou égales à $m-n$, ce déterminant est nul, puisqu'il a deux co-

lonnes identiques, et, pour les valeurs de p supérieures à $m-n$, il est encore nul, puisqu'il est alors égal au premier membre de l'une de nos équations.

Si maintenant nous donnons à p les $m-n+1$ valeurs correspondant aux rangs des colonnes de l'un quelconque des mineurs de l'ordre $n-1$ formés au moyen des éléments des $m-n$ premières lignes et de celle de rang j, nous obtiendrons $m-n+1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $m-n+1$ quantités $A_1^i, \ldots, A_{m-n}^i, A_j^i$ dont l'une au moins A_j^i, qui est égale à δ, est différente de zéro; leur déterminant, qui n'est autre chose que l'un des mineurs considérés, est donc nul. Ainsi donc tous ces mineurs sont nuls.

En donnant successivement à j les valeurs $m-n+1, \ldots, m$, on est amené à poser les n^2 équations suivantes

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} D_{m-n+1}^{m-n+1} = 0, & D_{m-n+1}^{m-n+2} = 0, & \ldots, & D_{m-n+1}^{m-n} = 0, \\ D_{m-n+2}^{m-n+1} = 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, & D_{m-n+2}^{m-n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D_{m-n}^{m-n+1} = 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, & D_{m-n}^{m-n} = 0, \end{array}\right.$$

et il en résulte que tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ formés des éléments des $m-n$ premières lignes auxquelles on joint successivement l'une quelconque des suivantes sont nuls.

En général, tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ sont nuls sans exception. Si, en effet, nous considérons l'une quelconque des combinaisons des m colonnes $m-n+1$ à $m-n+1$, les mineurs de l'ordre $n-1$ formés en prenant les $m-n$ premières lignes de ces colonnes successivement avec les suivantes sont nuls, ainsi que nous l'avons reconnu précédemment, et si, dans chaque combinaison des colonnes, l'un des mineurs de l'ordre n formé au moyen des éléments des $m-n$ premières lignes n'est pas nul, en raisonnant par rapport

aux colonnes, comme nous l'avons fait par rapport aux lignes, nous démontrerons que, dans chaque combinaison des colonnes, tous les mineurs de l'ordre $n-1$ sont nuls; donc tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ sont nuls.

Examinons maintenant le cas où Δ est le discriminant d'une forme quadratique à m variables. Il est alors symétrique par rapport à la diagonale $a_1^1 a_m^m$; si l'un des mineurs de l'ordre n ayant ses éléments symétriquement disposés par rapport à cette diagonale n'est pas nul, on pourra l'amener à la place du déterminant δ sans détruire la symétrie. Celles des équations (1) qui sont symétriques par rapport à la diagonale $D_{m-n+1}^{m-n+1} D_{m-n}^{m-n}$ ont leurs premiers membres identiques à cause de la symétrie du déterminant Δ; ces équations se réduiront donc aux suivantes :

$$\begin{array}{llll}
D_{m-n+1}^{m-n+1}=0, & D_{m-n+1}^{m-n+2}=0, & \ldots, & D_{m-n+1}^{m-n}=0, \\
 & D_{m-n+2}^{m-n+2}=0, & \ldots, & D_{m-n+2}^{m-n}=0, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
 & & \ldots, & D_{m-n}^{m-n}=0.
\end{array}$$

Leur nombre est égal à

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

En vertu de ces équations, tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ seront nuls si, dans chacune des combinaisons des m colonnes $m-n+1$ à $m-n+1$, l'un des mineurs de l'ordre n compris dans les $m-n$ premières lignes n'est pas nul.

Prenons, comme exemple, le polynôme suivant

$$(A-S)x^2+(A'-S)y^2+(A''-S)z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy;$$

il se décomposera en un carré si tous les mineurs du premier ordre de son discriminant sont nuls. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix}.$$

Soit $A - S \neq 0$; si, en outre, B'' ou B' n'est pas nul, soit $B'' \neq 0$; dans chaque combinaison des colonnes deux à deux, l'un des mineurs du second ordre compris dans la première ligne ne sera pas nul; les conditions sont alors

$$D_2^2 = 0, \qquad D_2^3 = 0, \qquad D_3^3 = 0$$

ou

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' \\ B'' & A' - S \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} = 0.$$

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B' \\ B' & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

La deuxième équation montre que B et B' sont tous deux différents de zéro ou tous deux nuls; dans le premier cas, on tirera de cette équation la valeur de S; et, en la reportant dans les deux autres équations, on aura les conditions

$$S = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''};$$

dans le deuxième cas, l'équation (3) donne $S = A''$, et l'équation (1) donne

$$\begin{vmatrix} A - A'' & B'' \\ B'' & A' - A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Prenons encore comme exemple le polynôme

$$\begin{gathered}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz \\ + 2B'xz + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2;\end{gathered}$$

on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Pour que le polynôme se décompose en une somme de deux carrés, il faut que tous les mineurs du premier ordre de Δ soient nuls. Soient

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} B' & C \\ B & C' \end{vmatrix} \neq 0;$$

alors, dans chaque combinaison des colonnes trois à trois, l'un des mineurs du second ordre compris dans les deux premières lignes n'est pas nul ; les conditions seront donc

$$D_3^3 = 0, \qquad D_3^4 = 0, \qquad D_4^4 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que ce même polynôme soit décomposable en un carré, il faut que tous les mineurs du second ordre de Δ soient nuls.

Supposons qu'on ait $A \neq 0$, et qu'en même temps deux des autres éléments de la première ligne ne soient pas nuls, par exemple B'' et B' ; alors, dans chaque combinaison des colonnes deux à deux, les mineurs du troisième ordre compris dans la première ligne ne sont pas tous nuls, et l'on a les conditions

$$D_2^2 = 0, \quad D_2^3 = 0, \quad D_2^4 = 0, \quad D_3^3 = 0, \quad D_3^4 = 0, \quad D_4^4 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ B'' & C' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A & B' \\ B' & A'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ B' & C'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ C & D \end{vmatrix} = 0.$$

SUR UNE FORMULE D'ANALYSE;

Par M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'École polytechnique de Porto, ancien professeur à l'Université de Coimbra.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, que je crois nouveau :

Si les fonctions $f(x)$ *et* $F(x)$ *et leurs dérivées* $f'(x)$, $F'(x)$, $f''(x)$, $F''(x)$, $\ldots$, $f^m(x)$, $F^n(x)$ *sont finies et déterminées pour toutes les valeurs de* x *qui sont comprises dans l'intervalle* (x_0, x), *nous avons la formule*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x-x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{F(x) - F(x_0) - \ldots - \dfrac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)} \\ &\quad = \frac{\dfrac{(x-x_0)^{i+1}}{(i+1)!} + \ldots + \dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0) + R}{\dfrac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + \dfrac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(x_0) + R'}, \end{aligned} \right.$$

où

$$R = \frac{(x-x_0)(1-\theta)^{m-1} f^m[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(m-1)!},$$

$$R' = \frac{(x-x_0)(1-\theta)^{n-1} F^n[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n-1)!},$$

θ *étant compris entre* 0 *et* 1.

Pour démontrer ce théorème, considérons la fonction

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) = {} & f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \\
& - f(z) - \frac{x - z}{1} f'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(z) \\
& - \Bigg[\mathrm{F}(x_0) + (x - x_0) \mathrm{F}'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} \mathrm{F}^k(x_0) \\
& \qquad - \mathrm{F}(z) - (x - z) \mathrm{F}'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{F}^{n-1}(z) \Bigg] \\
& \times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0) - (x - x_0) \mathrm{F}'(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^k}{k!} \mathrm{F}^k(x_0)}.
\end{aligned}
$$

En lui appliquant la formule connue

$$
(2) \qquad \varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi'[x_0 + \theta(x - x_0)],
$$

on trouve le résultat

$$
\begin{aligned}
0 = {} & f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \\
& - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0) \\
& - \Bigg[\mathrm{F}(x_0) + (x - x_0) \mathrm{F}'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} \mathrm{F}^k(x_0) \\
& \qquad - \mathrm{F}(x_0) - (x - x_0) \mathrm{F}'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{F}^{n-1}(x_0) \Bigg] \\
& \times \frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^k}{k!} \mathrm{F}^k(x_0)} \\
& + (x - x_0) \left\{ - \frac{(x - x_0)^{m-1} (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)!} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)] \right. \\
& \qquad \left. + \frac{(x - x_0)^{n-1} (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{F}^n[x_0 + \theta(x - x_0)] \right\} \\
& \times \frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^k}{k!} \mathrm{F}^k(x_0)}.
\end{aligned}
$$

De cette formule, on tire la formule (1) que nous voulions démontrer, en supposant

$$m = i - 1, \qquad n = k + 1.$$

I. Si l'on pose, dans la formule (1),

$$F(x) = (x - x_0)^n, \qquad k = n - 1, \qquad i = m - 1,$$

et, par conséquent,

$$F(x_0) = 0, \qquad F'(x_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^{n-1}(x_0) = 0,$$
$$F^n(x_0) = n!, \qquad F^n[x_0 + \theta(x - x_0)] = n!,$$

on a

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0)}{(x - x_0)^n}$$
$$= \frac{(n-1)!(x - x_0)^m (1-\theta)^{m-1} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!(m-1)!(x - x_0)^n (1-\theta)^{n-1} F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}$$

et, par conséquent,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0)$$
$$+ \frac{(x - x_0)^m (1-\theta)^{m-n}}{(m-1)!\, n} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)].$$

On obtient ainsi donc la formule de Taylor avec l'expression du reste de MM. Schlömich et Roche.

II. Si l'on pose, dans la formule (1), $i = k = n - 1$, on trouve

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{n-1} f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}}{F(x) - F(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{n-1} F^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}}$$
$$= \frac{f^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}{F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}.$$

On peut voir cette formule dans le *Cours de Calcul infinitésimal* de M. Hoüel, où elle est démontrée au moyen d'intégrations.

III. Si l'on a

$$f'(x_0)=0,\qquad f''(x_0)=0,\qquad \ldots,\qquad f^{n-1}(x_0)=0,$$
$$F'(x_0)=0,\qquad F''(x_0)=0,\qquad \ldots,\qquad F^{n-1}(x_0)=0,$$

il vient la formule bien connue

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{F(x)-F(x_0)}=\frac{f^n[x_0+\theta(x-x_0)]}{F^n[x_0+\theta(x-x_0)]}.$$

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA QUADRATRICE;

PAR M. G. FOURET.

1. Les courbes dont l'équation polaire est de la forme

(1) $$\rho=a\frac{\omega-\alpha}{\sin\omega}$$

sont intimement liées à la *Quadratrice de Dinostrate* (¹), qui correspond au cas particulier où α est nul. Le mode de description mécanique de ces courbes, qui résulte immédiatement de leur équation, est analogue de tout point à celui par lequel les géomètres anciens définissaient la quadratrice. Une analogie plus remarquable encore réside dans ce fait que *ces courbes peuvent être considérées comme les projections orthogonales*

(¹) Cette courbe est célèbre à plus d'un titre : on sait notamment que les Anciens la faisaient servir à une prétendue solution des problèmes de la quadrature du cercle et de la trisection de l'angle. Il est très présumable, et M. Paul Tannery a ajouté dans ces derniers temps (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. VII, p. 278) un nouveau degré de probabilité à cette opinion, que la quadratrice est, parmi les courbes transcendantes, la plus anciennement connue.

des sections planes d'une même surface de vis à filet carré, arbitrairement choisie, sur un plan perpendiculaire à l'axe de cette surface.

Conformément à un théorème bien connu dû à Pappus, on obtient une quadratrice proprement dite, lorsque le plan sécant passe par une des génératrices rectilignes de la surface de vis.

La généralisation que je viens d'indiquer du théorème de Pappus avait déjà été signalée par Chasles, dans une note au bas de la page 32 de l'*Aperçu historique* (2[e] édition), sauf une légère erreur consistant à assimiler la courbe obtenue à une *conchoïde* de la quadratrice ordinaire. Il m'a paru de quelque intérêt de rectifier l'énoncé donné par l'illustre géomètre et d'établir, par la démonstration simple qui va suivre, le résultat exact.

2. La figure étant rapportée à deux plans de projection, l'un, le plan horizontal, perpendiculaire à l'axe de la surface de vis, et contenant une génératrice parallèle au plan (P) de la section, l'autre vertical et perpendiculaire à ce plan (P), cherchons l'équation polaire de la projection horizontale de la courbe de section, en prenant pour pôle le pied O de l'axe de la surface, et pour axe polaire la génératrice Ox perpendiculaire à la ligne de terre.

Soient i l'angle du plan (P) avec le plan horizontal, h le pas de la surface de vis, et k la cote $O'O''$ du point (O, O'') d'intersection du plan (P) avec l'axe de la surface. Imaginons un plan horizontal quelconque rencontrant l'axe au point (O, O'''); il coupe la surface de vis suivant une génératrice dont la projection horizontale OG passe par le pied de l'axe, et le plan (P) suivant une perpendiculaire au plan vertical sur laquelle on obtient immédiatement un point (M, M') de la courbe de section.

Posons $OM = \rho$ et $\widehat{MOx} = \omega$. On a

$$O'''M' = O''O''' \times \cot i = (O'O''' - O'O'') \cot i = \left(\frac{h\omega}{2\pi} - k\right) \cot i.$$

Mais, MN étant la perpendiculaire abaissée de M sur Ox, on a d'autre part

$$O'''M' = NM = \rho \sin\omega ;$$

on en conclut

$$\rho \sin\omega = \left(\frac{h\omega}{2\pi} - k\right) \cot i,$$

ou bien

(1) $$\rho = a\,\frac{\omega - \alpha}{\sin\omega},$$

en posant

(2) $$a = \frac{h \cot i}{2\pi},$$

(3) $$\alpha = 2\pi\,\frac{k}{h}.$$

On retrouve ainsi l'équation de la quadratrice généralisée, qui devient la quadratrice elle-même, dans l'hypothèse où α, c'est-à-dire k, est nul, ce qui revient à supposer que le plan passe par une génératrice de la surface [1].

3. Il est à remarquer qu'en coupant une surface de vis à filet carré arbitrairement choisie par des plans de position et d'inclinaison variables, on peut obtenir toutes les courbes que donne l'équation (1), quand on y fait varier à volonté les paramètres a et α. Cela résulte de ce que, pour une valeur donnée de h, on peut, en vertu

---

[1] Il est plus exact de dire que, dans ce cas, la courbe de section se décompose en deux parties : la génératrice contenue dans le plan sécant, et une courbe qui se projette suivant la quadratrice.

des relations (2) et (3), choisir i et k, de manière à avoir pour a et α telles valeurs que l'on veut.

On peut remarquer encore que les divers plans passant par une même droite perpendiculaire à l'axe de la surface de vis fournissent un système simplement infini de courbes défini par l'équation (1), dans laquelle a varie seul, α restant constant. On obtient le système simplement infini répondant au cas où α varie seul, a restant constant, en coupant la surface de vis par une série de plans parallèles.

4. On pourrait construire la tangente en un point quelconque de la quadratrice généralisée, soit en s'appuyant sur son mode de génération mécanique et se servant de la méthode de Roberval, soit en la faisant dériver, comme on vient de le voir, de la surface de vis à filet carré et appliquant les procédés de la Géométrie descriptive. Mais on arrive à une construction plus simple, de la manière suivante.

Portons sur la partie positive de l'axe polaire Ox, un segment $OA = a$, et supposons construite la courbe inverse de la courbe (1), en prenant le point O comme pôle et a^2 comme paramètre de la transformation. L'équation de cette courbe inverse étant, par suite,

$$(4) \qquad \rho_1 = a\,\frac{\sin\omega}{\omega - \alpha};$$

l'angle V, formé par la tangente en un point quelconque M_1 de cette dernière courbe ([1]), avec le rayon

---

([1]) Cette courbe est la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, d'une surface de vis à filet carré, de la courbe d'ombre de cette surface éclairée par des rayons convergents (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 33).

vecteur qui y aboutit, est donné par la relation

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho_1}{\rho'_1} = \frac{a \sin \omega}{a \cos \omega - \rho_1}.$$

Or, P étant la projection de A sur OM_1, on a

$$a \sin \omega = PA, \qquad a \cos \omega = OP, \qquad a \cos \omega - \rho_1 = PM_1;$$

d'où l'on conclut que l'angle V est égal à l'angle $\widehat{AM_1P}$, et par suite que la tangente en M_1 à la courbe (4) passe par le point I symétrique de A par rapport à OM_1 [1].

Cela posé, l'inversion qui nous fait passer de la courbe (4) à la courbe (1) transforme la tangente $M_1 I$ en une circonférence qui touche la courbe (1) au point M inverse de M_1, et qui contient les points O et I, ce dernier point n'étant pas atteint par la transformation, puisque l'on a

$$OI = OA = a.$$

Mais l'angle $\widehat{OIM}$ est inscrit dans un segment capable de l'angle formé par le rayon vecteur OM et la tangente en M à la courbe (1) dirigée dans le sens où croît l'angle polaire. D'ailleurs les angles $\widehat{OIM}$ et $\widehat{OAM}$ sont égaux, étant symétriques par rapport à OM.

Par suite, *la tangente à la quadratrice ordinaire ou généralisée, en un point quelconque, fait, avec le rayon vecteur qui y aboutit, un angle égal à celui sous lequel ce rayon vecteur est vu d'un certain point fixe.*

---

[1] Cette construction a déjà été obtenue précédemment, comme cas particulier d'un problème plus général (*loc. cit.*, p. 35).

LE DÉTERMINANT DE SMITH ET MANSION;

Par M. Ernest CESARO.

1. Soit $F(i, j)$ une fonction quelconque du plus grand commun diviseur de i et j. M. Smith a trouvé la valeur du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & F(1,3) & \dots & F(1,n) \\ F(2,1) & F(2,2) & F(2,3) & \dots & F(2,n) \\ F(3,1) & F(3,2) & F(3,3) & \dots & F(3,n) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ F(n,1) & F(n,2) & F(n,3) & \dots & F(n,n) \end{vmatrix},$$

dans le cas particulier de $F(x) = x$. M. Mansion a donné, ensuite, l'expression générale de D. Ayant imaginé une fonction f, telle que l'on ait, pour toute valeur de x,

$$F(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \dots,$$

où a, b, c, ... sont les diviseurs de x, M. Mansion a trouvé

$$(1) \qquad D = f(1)f(2)f(3)\dots f(n).$$

Soit $\mu(x)$ une fonction généralement nulle, mais égale à $(-1)^\tau$ lorsque x est le produit de τ facteurs premiers, inégaux. Si la fonction F est *donnée* et si l'on veut connaître f, on a la formule

$$(2) \qquad f(x) = \mu\left(\frac{x}{1}\right)F(1) + \mu\left(\frac{x}{2}\right)F(2) + \mu\left(\frac{x}{3}\right)F(3) + \dots.$$

2. Les études des géomètres sur le déterminant D se bornent à la formule (1). Dans l'article *Determinanti in Aritmetica*, inséré au *Journal de Battaglini* (1885),

nous avons fait connaître d'autres résultats, et, en particulier, nous avons démontré que le complément algébrique de l'élément $F(i, j)$ est donné par la formule

$$(3) \qquad A_{i,j} = D \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\mu\left(\frac{\nu}{i}\right)\mu\left(\frac{\nu}{j}\right)}{f(\nu)},$$

et nous en avons déduit que $A_{i,j}$ *est nul lorsque le quotient du plus petit commun multiple par le plus grand commun diviseur de i et j admet des facteurs carrés.*

3. En nous aidant des relations qui précèdent, nous allons chercher la valeur du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} C & G(1) & G(2) & \dots & G(n) \\ G(1) & F(1,1) & F(1,2) & \dots & F(1,n) \\ G(2) & F(2,1) & F(2,2) & \dots & F(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(n) & F(n,1) & F(n,2) & \dots & F(n,n) \end{vmatrix},$$

que nous écrirons, sous forme abrégée, comme il suit :

$$\Delta = \begin{Vmatrix} C & G(i) \\ G(j) & F(i,j) \end{Vmatrix}_n.$$

Il est évident que

$$\Delta = CD - \sum_{i,j} G(i)G(j)A_{i,j},$$

i et j variant séparément de 1 à n. On a donc, en vertu de (3) et en supposant, pour simplifier, $C = 0$,

$$\Delta = -D \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ \frac{1}{f(\nu)} \sum_{i,j} G(i)G(j)\mu\left(\frac{\nu}{i}\right)\mu\left(\frac{\nu}{j}\right) \right\}.$$

Or il est clair que

$$\sum_{i,j} G(i)G(j)\mu\left(\frac{\nu}{i}\right)\mu\left(\frac{\nu}{j}\right) = \left\{ G(1)\mu\left(\frac{\nu}{1}\right) + G(2)\mu\left(\frac{\nu}{2}\right) + \dots \right\}^2,$$

et, par suite, si l'on imagine une fonction g, qui se déduise de G, comme la fonction f a été déduite de F, on peut écrire, en ayant égard à (2),

$$\Delta = -f(1)f(2)f(3)\ldots f(n)\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{g^2(\nu)}{f(\nu)}.$$

Par exemple,

$$\begin{Vmatrix} 0 & F(i) \\ F(j) & F(i,j) \end{Vmatrix}_n = -f(1)f(2)\ldots f(n)\{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\}.$$

Autre exemple : Si $F(x)$ est le *nombre des diviseurs* de x, et $G(x)$ le *nombre des diviseurs premiers* de x, le déterminant

$$\begin{Vmatrix} 0 & G(i) \\ G(j) & F(i,j) \end{Vmatrix}_n$$

représente, en valeur absolue, la *totalité des nombres premiers, non supérieurs à n.*

4. Cherchons, de même, la valeur du déterminant

$$\nabla = \begin{Vmatrix} 0 & G(i) \\ G(j) & \mathrm{A}_{i,j} \end{Vmatrix}_n.$$

La considération du déterminant réciproque de D conduit immédiatement à la formule

$$\nabla = -\mathrm{D}^{n-2}\sum_{i,j}G(i)G(j)F(i,j).$$

Ordonnons le second membre par rapport à la fonction f. Il est clair que l'on trouve $f(\nu)$ pour les couples de valeurs de i et j, choisies parmi les multiples de ν, non supérieurs à n. Conséquemment

$$\nabla = -\mathrm{D}^{n-2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left[f(\nu)\left\{G(\nu)+G(2\nu)+\ldots+G\left(\left[\frac{n}{\nu}\right]\nu\right)\right\}^2\right].$$

Par exemple, pour $G(x) = 1$, on trouve

$$\nabla = - D^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\frac{n}{\nu}\right]^2 f(\nu).$$

Si l'on imagine une fonction F_0, définie par la relation

$$F_0(x) = \frac{f(a)}{a} + \frac{f(b)}{b} + \frac{f(c)}{c} + \ldots,$$

on obtient définitivement

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & A_{i,j} \end{Vmatrix}_n = -[f(1)f(2)\ldots f(n)]^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ 2\nu F_0(\nu) - F(\nu) \right\}.$$

Comme dernier exemple, faisons $G(x) = x$, de sorte que

$$\nabla = -\frac{D^{n-2}}{4} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu^2 f(\nu) \left[\frac{n}{\nu}\right]^2 \left\{ \left[\frac{n}{\nu}\right] - 1 \right\}^2.$$

Après quelques transformations simples, on obtient

$$\begin{Vmatrix} 0 & i \\ j & A_{i,j} \end{Vmatrix}_n = -[f(1)f(2)\ldots f(n)]^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu^3 F_0(\nu).$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. le Dr Louis Saalschütz, professeur extraord. de l'Université de Königsberg.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. IV, 3e série, p. 57, se trouve un petit Mémoire de M. Hermite sur une identité trigonométrique, dans lequel le grand analyste démontre un résultat de M. Glaisher en

lui donnant en même temps une plus grande extension. Mais la formule employée par M. Hermite, dont l'origine est due à Cauchy, permet d'ajouter une autre relation trigonométrique encore inconnue, comme je le crois.

Soit donc

$$(1)\qquad f(x) = \frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)};$$

d'où l'on tire, en faisant $\xi = e^{ix}$, $\xi^2 = t$,

$$(2)\; f(x) = \mathrm{F}(t) = \frac{(te^{-b_1 i} - e^{b_1 i})(te^{-b_2 i} - e^{b_2 i})\ldots(te^{-b_n i} - e^{b_n i})}{(te^{-a_1 i} - e^{a_1 i})(te^{-a_2 i} - e^{a_2 i})\ldots(te^{-a_n i} - e^{a_n i})}.$$

Maintenant la formule connue de Cauchy énonce

$$(3)\qquad \mathrm{F}(t) = \sum \text{rés}\,\frac{\mathrm{F}(z)}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\mathrm{F}(z)}{z-t}\,dz,$$

l'intégrale prise autour d'une assez grande partie du plan enfermant au moins tous les points où $\mathrm{F}(z)$ devient infini et dont la circonférence est fermée par une courbe quelconque. Mais, si nous posons

$$e^{2a_1 i} = \alpha_1,\qquad e^{2a_2 i} = \alpha_2,\qquad \ldots,\qquad e^{2a_n i} = \alpha_n,$$

nous pouvons écrire

$$(4)\; \frac{\mathrm{F}(z)}{z-t} = \frac{(ze^{-b_1 i} - e^{b_1 i})(ze^{-b_2 i} - e^{b_2 i})\ldots(ze^{-b_n i} - e^{b_n i})}{(z-t)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)\,e^{-(a_1+a_2+\ldots+a_n)i}},$$

et le résidu de cette fonction correspondant au pôle $z = \alpha$, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{z-\alpha_1}$ près de $z = \alpha_1$, se trouve

$$= \frac{(\alpha_1 e^{-b_1 i} - e^{b_1 i})(\alpha_1 e^{-b_2 i} - e^{b_2 i})\ldots(\alpha_1 e^{-b_n i} - e^{b_n i})}{(\alpha_1 - t)(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_n)\,e^{-(a_1+a_2+\ldots+a_n)i}}$$

ou, en multipliant le numérateur et le dénominateur

par $e^{-na_1 i}$,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &= \frac{\left(e^{(a_1-b_1)i} - e^{-(a_1-b_1)i}\right)\cdots\left(e^{(a_1-b_n)i} - e^{-(a_1-b_n)i}\right)}{(x_1-t)\left(e^{(a_1-a_2)i} - e^{-(a_1-a_2)i}\right)\cdots\left(e^{(a_1-a_n)i} - e^{-(a_1-a_n)i}\right)e^{-2a_1 i}},\\ &= \frac{\sin(a_1-b_1)\sin(a_1-b_2)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)}\,\frac{2ix_1}{x_1-t}. \end{aligned}\right.$$

En conséquence de cette expression et des expressions pareilles pour x_2, x_3, ..., x_n, on trouve la somme des résidus de $\frac{F(z)}{t-z}$, si l'on désigne, pour abréger,

$$\frac{\sin(a_1-b_1)\sin(a_2-b_2)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} \quad \text{par} \quad A_1,$$

$$\frac{\sin(a_2-b_1)\sin(a_2-b_2)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} \quad \text{par} \quad A_2,$$

. . . . ;

$$(6)\quad \sum \text{rés}\,\frac{F(z)}{t-z} = -2i\left(\frac{A_1x_1}{x_1-t} + \frac{A_2x_2}{x_2-t} + \ldots + \frac{A_nx_n}{x_n-t}\right).$$

Considérons maintenant l'intégrale de la formule (3)

$$Y = \int \frac{F(z)}{z-t}\,dz.$$

Par la substitution qui suppose la circonférence comme cercle

$$z = Re^{i\varphi},$$

et, en prenant R très grand, il résulte de la formule (2)

$$F(z) = \frac{e^{-(b_1+b_2+\ldots+b_n)i}}{e^{-(a_1+a_2+\ldots+a_n)i}} = e^{(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n)i},$$

et, puisque la quantité t peut être supprimée en face de z, on a

$$\frac{dz}{z} = i\,d\varphi,$$

et, par là, en intégrant autour du cercle ayant le

rayon R,

$$(7)\qquad Y = \int_0^{2\pi} \frac{F(z)\,dz}{z} = 2i\pi[\cos(s) + i\sin(s)],$$

où s est écrit au lieu de

$$(a_1 + a_2 - \ldots + a_n - b_1 - b_2 - \ldots - b_n).$$

En combinant les formules (6) et (7), nous recevons de (3)

$$(8)\qquad \begin{cases} F(t) = -2i\left(\dfrac{A_1\alpha_1}{\alpha_1 - t} + \dfrac{A_2\alpha_2}{\alpha_2 - t} + \ldots + \dfrac{A_n\alpha_n}{\alpha_n - t}\right) \\ \qquad + \cos(s) + i\sin(s). \end{cases}$$

Mais

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - t} = \frac{e^{2a_1 i}}{e^{2a_1 i} - e^{2xi}};$$

d'où l'on conclut facilement, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $(e^{-2a_1 i} - e^{-2xi})$,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - t} = \frac{1}{2}[1 - i\cot(a_1 - x)],$$

de même

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - t} = \frac{1}{2}[1 - i\cot(a_2 - x)], \qquad \ldots$$

Par cela, il vient de (7)

$$(9)\qquad \begin{cases} F(t) = f(x) = -A_1\cot(a_1 - x) - A_2\cot(a_2 - x) - \ldots \\ \qquad - A_n\cot(a_n - x) + \cos(s) \\ \qquad - i[A_1 + A_2 + \ldots + A_n - \sin(s)]; \end{cases}$$

ce qui donne, si l'on sépare ce qui est réel de ce qui est imaginaire,

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin(a_1 - b_1)\sin(a_1 - b_2)\ldots\sin(a_1 - b_n)}{\sin(a_1 - a_2)\sin(a_1 - a_3)\ldots\sin(a_1 - a_n)} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{\sin(a_n - b_1)\sin(a_n - b_2)\ldots\sin(a_n - b_n)}{\sin(a_n - a_1)\sin(a_n - a_2)\ldots\sin(a_n - a_{n-1})} \\ \qquad = \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 - b_2 - \ldots - b_n), \end{cases}$$

ce qui est la formule de M. Hermite, et encore

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}\\
&\quad = \frac{\sin(a_1-b_1)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\ldots\sin(a_1-a_n)}\cot(x-a_1)\\
&\quad + \frac{\sin(a_2-b_1)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\ldots\sin(a_2-a_n)}\cot(x-a_2)\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \frac{\sin(a_n-b_1)\ldots\sin(a_n-b_n)}{\sin(a_n-a_1)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\cot(x-a_n)\\
&\quad + \cos(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n),
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui est la formule annoncée.

Soient, pour spécialiser cette formule (11),

$$
b_1 = a_1 + \frac{\pi}{2},\quad b_2 = a_2 + \frac{\pi}{2},\quad \ldots,\quad b_n = a_n - \frac{\pi}{2}.
$$

Alors d'elle sortira

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n \cot(x-a_1)\ldots\cot(x-a_n)\\
&\quad = (-1)^n[\cot(a_1-a_2)\ldots\cot(a_1-a_n)\cot(x-a_1)+\ldots\\
&\qquad + \cot(a_n-a_1)\ldots\cot(a_n-a_{n-1})\cot(x-a_n)] + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ou, en faisant $x = a_0$,

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cot(a_0-a_1)\cot(a_0-a_2)\ldots\cot(a_0-a_n)\\
&\quad + \cot(a_1-a_0)\cot(a_1-a_2)\ldots\cot(a_1-a_n)+\ldots\\
&\quad + \cot(a_n-a_0)\cot(a_n-a_1)\ldots\cot(a_n-a_{n-1}) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)(-1)_n,
\end{aligned}
\right.
$$

c'est-à-dire

$$
= \left\{
\begin{aligned}
&0 \text{ si } n \text{ est impair,}\\
&(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ est pair.}
\end{aligned}
\right.
$$

Mettons, dans la formule (11), $\frac{\pi}{2} - x$ au lieu de x;

alors nous aurons

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\cos(x+b_1)\cos(x+b_2)\ldots\cos(x+b_n)}{\cos(x+a_1)\cos(x+a_2)\ldots\cos(x+a_n)} \\ &\quad = \frac{\sin(a_1-b_1)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\ldots\sin(a_1-a_n)}\operatorname{tang}(x+a_1) \\ &\quad + \frac{\sin(a_2-b_1)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\ldots\sin(a_2-a_n)}\operatorname{tang}(x+a_2) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \frac{\sin(a_n-b_1)\ldots\sin(a_n-b_n)}{\sin(a_n-a_1)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\operatorname{tang}(x+a_n) \\ &\quad + \cos(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n). \end{aligned} \right.$$

Si nous écrivons enfin, dans cette formule, $\frac{x}{r}$, $\frac{a_1}{r}$, $\frac{a_2}{r}$, ..., $\frac{b_1}{r}$, $\frac{b_2}{r}$, ... pour x, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., le nombre r croissant jusqu'à l'infini, elle produira

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(a_1-b_2)(a_1-b_3)\ldots(a_1-b_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}(a_1-b_1)(a_1+x) \\ &\quad + \frac{(a_2-b_1)(a_2-b_3)\ldots(a_2-b_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}(a_2-b_2)(a_2+x)+\ldots \\ &\quad + \frac{(a_n-b_1)(a_n-b_2)\ldots(a_n-b_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}(a_n-b_n)(a_n+x) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big\{(a_1-b_1)(a_1+b_1+2x) \\ &\quad + (a_2-b_2)(a_2+b_2+2x) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + (a_n-b_n)(a_n+b_n+2x) \\ &\quad + [(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_n-b_n)]^2\Big\}. \end{aligned} \right.$$

Voilà une formule algébrique qui contient deux relations en comparant les coefficients de x^0 et de x. En appliquant la même méthode aux formules (11) et (12), il en sortira des identités eulériennes très connues.

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure, à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale et à l'Agrégation, par *J. Kœhler,* ancien Répétiteur à l'École Polytechnique et ancien Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. *Questions et solutions;* première Partie : *Géométrie plane.* 1 vol. in-8° de VI-347 pages, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars, 1886. Prix : 9fr.

Il est inutile d'insister ici sur l'importance du rôle que jouent les Exercices dans l'enseignement des Mathématiques. Cette importance est manifeste. Les Exercices ne sont pas seulement un complément utile, mais véritablement une partie intégrante de l'enseignement, sans laquelle le reste n'est que lettre morte. Ils doivent entrer pour une part égale à celle de la théorie dans les Cours de Mathématiques, comme cela, d'ailleurs, a lieu dans les examens.

Les Ouvrages didactiques offrent bien, en général, en fin de Chapitres, des Recueils d'exercices; mais ils se bornent, sauf pour de rares exemples, à en donner les énoncés.

Aussi a-t-on dès longtemps reconnu la nécessité d'avoir des Ouvrages spéciaux consacrés aux seuls exercices, et où les solutions se trouvent développées.

On en possède d'excellents relatifs aux Mathématiques élémentaires (Desboves, Frères de la Doctrine chrétienne, etc.), au Calcul différentiel et intégral (Frenet, Tisserand, Villié, etc.), à la Mécanique (P. Jullien, de Saint-Germain, etc.), à la Physique même (Chevallier et Müntz, Edme Jacquier, etc.); mais il faut avouer qu'en ce qui concerne les Mathématiques spéciales notre littérature mathématique française présentait une lacune. Cette lacune, un professeur distingué, auquel une longue expérience de l'enseignement avait signalé ce *desideratum,* M. Kœhler, vient de la combler.

M. Kœhler nous offre un Recueil d'exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure en deux Volumes. Le tome I, consacré à la Géométrie plane, vient de paraître. Le tome II, réservé à la Géométrie de l'espace, ne tardera pas à le suivre.

Bien qu'on ne puisse encore juger de l'œuvre que par sa première moitié, on peut dès à présent émettre à son endroit l'opinion la plus favorable. Cette première Partie constitue, en effet, déjà, à elle seule, un Ouvrage fort important et fort bien fait.

L'auteur ne s'est point astreint à suivre, dans la rédaction de son livre, les programmes officiels : il s'est attaché aux théories qui lui ont semblé présenter le plus d'intérêt au point de vue géométrique, à celles qui se prêtent aux développements les plus nombreux et les plus attrayants; il a particulièrement insisté sur celles que l'enseignement classique, limité par les programmes officiels, doit forcément un peu délaisser et qui pourtant sont aujourd'hui de la plus haute importance en Géométrie.

Le Chapitre I est consacré aux cercles et systèmes de cercles. Nous y remarquons des problèmes intéressants sur les quadrilatères et les triangles à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle.

Le Chapitre II renferme des problèmes sur les coniques (propriétés des tangentes, pôles et polaires, diamètres, triangles inscrits et circonscrits, foyers, etc.).

Le Chapitre IV est également relatif aux coniques; mais les problèmes traités ici se rapportent aux normales et aux triangles à la fois inscrits dans une conique et circonscrits à une autre conique. On trouvera là de jolis théorèmes, démontrés d'une manière tout élémentaire.

Dans les deux Chapitres précédents, l'équation des coniques était prise sous forme réduite. Au Chapitre IV, l'auteur envisage ces courbes comme définies par l'équation générale du second degré. Il détermine divers lieux géométriques qui se rattachent à des systèmes de coniques satisfaisant à certaines conditions données. C'est une catégorie de problèmes à laquelle appartiennent bon nombre de questions posées dans les examens.

Le Chapitre V contient des exercices relatifs aux intersections de coniques, aux coniques tangentes et osculatrices, et donne lieu à la même observation que le précédent.

Le Chapitre VI est consacré à l'exposition d'une méthode importante, celle des coordonnées trilinéaires, que l'on se contente d'effleurer dans les Cours et que l'auteur développe avec assez de détails pour que le lecteur puisse en faire une application courante. M. Kœhler a réuni là, en ce qui concerne la ligne droite, le cercle et les coniques, un grand nombre de formules éparses dans divers Ouvrages et qui se prêtent à la solution de bien des problèmes rebelles aux méthodes classiques.

Dans le Chapitre VII, l'auteur donne des applications très nombreuses, très intéressantes, des formules générales établies dans le Chapitre précédent. On y trouve notamment une étude analytique des points et du cercle de Brocard, divers problèmes traités par les coordonnées tangentielles, des applications de la théorie des invariants et covariants d'un système de deux coniques, une étude probablement inédite d'un système harmonique de trois coniques, etc.

Le Chapitre VIII traite des applications de la Géométrie supérieure aux sections coniques. L'auteur, en cette partie de son Ouvrage, a pris pour guides les travaux de Chasles, Cremona, et, comme il nous le dit lui-même dans la Préface, les *Mathematical problems* de Wolstenholme. Un appendice à ce Chapitre est consacré aux triangles et polygones à la fois inscrits et circonscrits à des coniques. On y remarquera une démonstration nouvelle du célèbre théorème de Poncelet.

Enfin le Chapitre IX est réservé aux courbes d'ordre supérieur. Il renferme, entre autres, des propriétés intéressantes des cubiques et la détermination du rayon de courbure, ainsi que la recherche de l'équation du cercle osculateur en coordonnées trilinéaires, questions qui n'avaient probablement jamais été traitées.

Nous devons, faute de place, nous borner à cette rapide analyse, qui ne peut donner qu'une idée bien imparfaite de l'Ouvrage. Il nous est impossible d'énumérer les sujets très nombreux auxquels a touché l'auteur, mais nous sommes certains que les personnes qui, sur ces seules indications, auraient le désir de connaître ce Livre en apprécieront toute la valeur et toute l'originalité.

L'œuvre de M. Kœhler sera utile à la fois aux maîtres et aux élèves; aussi bien est-il permis d'avancer, dès aujourd'hui, qu'elle est destinée à devenir promptement classique.

Nous ne terminerons pas sans louer le soin merveilleux

apporté par notre grand éditeur, M. Gauthier-Villars, à l'exécution typographique de ce Volume, comme à celle d'ailleurs de toutes les belles publications qui sortent de ses presses.

MAURICE D'OCAGNE.

INTRODUCTION A LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE; par *Jules Tannery*, Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure. In-8°. Paris, A. Hermann, 1886. Prix : 10fr.

Quoique les vérités mathématiques se déduisent, dans un ordre rigoureux, d'un petit nombre de principes réputés évidents, on ne parvient point à les posséder pleinement en commençant par ces principes, en en suivant pas à pas les déductions, en allant toujours dans le même sens du connu à l'inconnu, sans jamais revenir en arrière sur un chemin où l'on n'a rien laissé d'obscur. Le sens et la portée des principes échappent au débutant, qui saisit mal la distinction entre ce qu'on lui demande d'accorder et les conséquences purement logiques des hypothèses ou des axiomes; parfois, la démonstration lui paraît plus obscure que l'énoncé; c'est en vain qu'il s'attarderait dans la région des principes pour la mieux connaître, il faut que son esprit acquière des habitudes qu'il n'a pas, qu'il aille en avant, sans trop savoir ni où il va, ni d'où il part; il prendra confiance dans ce mode de raisonnement auquel il lui faut plier son intelligence, il s'habituera aux symboles et à leurs combinaisons. Revenant ensuite sur ses pas, il sera capable de voir, du point de départ et d'un seul coup d'œil, le chemin parcouru : quelques parties de la route resteront pour lui dans l'ombre, quelques-unes même seront peut-être entièrement obscures; mais d'autres sont vivement éclairées; il sait nettement comment on peut aller de cette vérité à cette autre; il sait où il doit porter son attention; ses yeux mieux exercés arrivent à voir clair dans ces passages difficiles dont il n'aurait jamais pu se rendre maître s'il ne les avait franchis; il est maintenant capable d'aller plus loin ou de suivre une autre direction; il entre en possession de vérités nouvelles qui s'ajoutent aux vérités anciennes et qui les éclairent; il s'étonne parfois des perspectives inattendues qui s'ouvrent devant lui et lui laissent voir, sous un aspect nouveau, des régions qu'il

croyait connaître entièrement; peu à peu les ombres disparaissent et la beauté de la Science, si une dans sa riche diversité, lui apparaît avec tout son éclat.

Ce qui se passe dans l'esprit de celui qui étudie les Mathématiques n'est que l'image de ce qui s'est passé dans la création et l'organisation de la Science; dans ce long travail, la rigueur déductive n'a pas été seule à jouer un rôle. On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, et la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile. Même en Mathématiques, c'est souvent par des chemins peu sûrs que l'on va à la découverte. Avant de faire la grande route qui y mène, il faut connaître la contrée où l'on veut aller; c'est cette connaissance même qui permet de trouver les voies les plus directes; c'est l'expérience seule qui indique les points où il faut porter l'effort; ce sont les difficultés, parfois imprévues, qui se dressent devant les géomètres qui les forcent à revenir au point de départ, à chercher une route nouvelle qui permette de tourner l'obstacle. S'imagine-t-on, par exemple, les inventeurs du Calcul différentiel et intégral s'acharnant, avant d'aller plus loin, sur les notions de dérivée et d'intégrale définie? Ne valait-il pas mieux montrer la fécondité de ces notions, dont l'importance justifie le soin qu'on a mis à les éclaircir? Cette revision même, qu'on a faite de notre temps, l'aurait-on entreprise sans les questions que l'étude des fonctions et particulièrement des séries trigonométriques a posées d'une manière inévitable?

Pour en revenir à l'enseignement, il me semble que, dans notre système d'instruction, la revision des principes de l'Analyse s'impose nécessairement comme transition entre les matières que l'on traite dans les cours de Mathématiques spéciales et celles que l'on étudie soit dans les Facultés, soit dans les Écoles d'enseignement supérieur. A la fin de la classe de Mathématiques spéciales, les élèves sont maîtres d'un nombre de faits mathématiques déjà considérable; ils possèdent les éléments de l'Algèbre, de la Géométrie analytique et même du Calcul différentiel et intégral. Un classement rigoureux de ces matériaux est indispensable. C'est pour faciliter ce travail, en ce qui concerne l'Analyse, que je me suis décidé à publier le présent Livre, où j'ai développé quelques leçons faites à l'École Normale en 1883. Je l'ai fait aussi élémentaire que j'ai pu, en m'efforçant de rapprocher les choses des principes, mais en

essayant toutefois d'être particulièrement utile à ceux qui désirent pousser leurs études mathématiques beaucoup plus loin que je ne prétends les conduire.

Je n'ai eu qu'à me livrer à un travail d'arrangement et de rédaction : les faits mathématiques qui constituent et constitueront toujours les éléments de l'Analyse étaient acquis pour la plupart au commencement de ce siècle ; à la vérité, bien des démonstrations laissaient à désirer; mais, après les exemples de rigueur donnés par Gauss, après les travaux de Cauchy, d'Abel, de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de M. O. Bonnet, de M. Heine, après l'enseignement de M. Weierstrass, divulgué et développé par ses disciples, après le Mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues, les Livres de M. Dini et de M. Lipschitz, il ne semble pas qu'il reste quelque chose d'essentiel à élucider dans les sujets auxquels je me suis borné.

On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience; la notion de l'infini, dont il ne faut pas faire mystère en Mathématiques, se réduit à ceci : après chaque nombre entier, il y en a un autre. C'est à ce point de vue que j'ai essayé de me placer. A la vérité, pour être complet, il eût fallu reprendre la théorie des fractions; une fraction, du point de vue que j'indique, ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unité; ces mots *parties de l'unité* n'ont plus de sens : une fraction est un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre déterminé ; sur cette nouvelle espèce de nombres, il y a lieu de reprendre les définitions de l'égalité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques. J'aurais dû aussi reprendre la théorie des nombres positifs et négatifs, théorie que l'on ne dégage pas toujours de la considération des grandeurs concrètes, et dans laquelle il faut encore reprendre à nouveau les définitions élémentaires. Mais tout cela est facile et les développements que j'aurais dû donner sur ces sujets auraient allongé mon Livre et augmenté, sans grande utilité, la fatigue du lecteur. J'ai donc supposé acquise la théorie des opérations rationnelles sur les nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, et j'ai débuté par l'introduction des nombres irrationnels. J'ai développé une indication donnée par M. Joseph Bertrand dans son excellent Traité d'Arithmétique et qui consiste à définir un

nombre irrationnel en disant quels sont tous les nombres rationnels qui sont plus petits et tous ceux qui sont plus grands que lui ; c'est de cette façon que les nombres irrationnels s'introduisent le plus naturellement quand on traite de la mesure des grandeurs incommensurables avec l'unité ; j'ai d'ailleurs cherché à dégager la notion de nombre irrationnel de son origine géométrique. J'ai appris, par une citation de M. G. Cantor (*Grundlagen einer allgemeiner Mannichfaltigkeitslehre*, p. 21), que M. Dedekind avait développé la même idée dans un écrit intitulé *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Brunswick, 1872); je n'ai pas eu à ma disposition le travail de M. Dedekind, mais les développements d'une même idée se ressemblent forcément, et il y a lieu de supposer que ce qui est bon dans mon exposition se retrouve dans celle du géomètre allemand, qui a d'ailleurs bien d'autres titres de gloire. D'autres points de départ ont été indiqués : M. Weierstrass, qui ne craint pas de s'attarder sur ces matières dans un cours qui aboutit à l'étude des fonctions abéliennes, considère, si mes renseignements sont exacts, un nombre irrationnel comme la somme d'un nombre infini d'éléments rationnels, en précisant toutefois avec rigueur sous quelles conditions on peut parler de pareilles sommes et les employer; M. Heine, dans le Mémoire déjà cité, *Die Elemente der Functionenlehre*, a proposé de dire qu'une suite infinie de nombres rationnels

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

a une *limite* lorsque, à chaque nombre rationnel positif ε correspond un indice n tel que la différence $u_{n+p} - u_n$ soit, pour toutes les valeurs du nombre entier positif p, inférieure à ε en valeur absolue. Cette définition admise, l'introduction des nombres irrationnels, comme limites de pareilles suites, ne souffre aucune difficulté; c'est la marche qu'ont suivie MM. Lipschitz, du Bois-Reymond, G. Cantor. Je trouve cette définition plus arbitraire que celle que j'ai adoptée, qui permet, dès qu'un nombre irrationnel est défini, de lui donner sa place dans l'échelle des nombres; cependant, comme on ne peut se dispenser de faire l'étude des suites qui jouissent de la propriété précédente, j'ai fait cette étude indépendamment de la théorie des opérations effectuées sur les nombres irrationnels, en montrant comment elle permettrait de constituer cette théorie. Le lecteur ne manquera pas de remarquer

que mon exposition pourrait être abrégée en ne reprenant pas deux fois, comme j'ai fait, les choses au commencement.

Les notions de nombre irrationnel et de limite une fois acquises, les éléments de la théorie des séries et des produits infinis ne présentent aucune difficulté; les deux façons d'introduire ces notions y jouent un rôle essentiel; la seconde n'est d'ailleurs autre chose que le point de départ adopté par Cauchy, pour la théorie des séries, dans son *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique,* Livre qu'on peut encore admirer, depuis le temps où Abel disait qu'*il devait être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques.* La notion de produit infini se relie étroitement à celle de série; les deux notions, à elles deux, ne tiennent pas plus de place dans l'esprit qu'une seule; j'ai cru devoir les développer concurremment.

Avant de parler des séries et des produits infinis dont les termes dépendent d'une variable, j'ai donné quelques théorèmes généraux relatifs aux fonctions d'une variable; je me suis efforcé de préciser les définitions, d'éclaircir les notions de continuité, de limites supérieure et inférieure. J'ai fait grand usage, dans ce Chapitre et ailleurs, du beau Mémoire de M. Darboux *Sur les fonctions discontinues.* J'ai repris ensuite les définitions des fonctions a^x, $\log x$, x^m; à propos de la fonction a^x, j'ai reproduit la démonstration par laquelle Cauchy déduit la forme de cette fonction de son théorème d'addition.

Dans le Chapitre suivant, je reprends la théorie des séries et des produits infinis; je me suis appesanti particulièrement sur les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable; à la vérité, j'ai supposé, là comme partout, la variable réelle : une variable imaginaire, c'est au fond deux variables réelles, et je tenais à me limiter au cas d'une seule variable; mais l'exposition est faite de manière à permettre la généralisation immédiatement et sans aucun effort; il n'y a, le plus souvent, qu'à mettre le mot *module* à la place des mots *valeur absolue.* Dans notre enseignement, on déduit d'habitude de la formule de Taylor les développements en série des fonctions trigonométriques, et l'on tire leurs développements en produits infinis ou en séries de fractions simples de propositions générales appartenant à la théorie des fonctions d'une variable imaginaire: il me paraît bien regrettable

de laisser ignorer aux étudiants les procédés si simples, si naturels par lesquels Euler a obtenu ces développements; ils deviennent tous rigoureux par l'application d'un même raisonnement, de celui qui permet de déduire la continuité d'une série de l'uniformité de sa convergence. Il va sans dire que j'ai dû dégager la définition des fonctions circulaires de toute considération géométrique; j'ai terminé ce Chapitre en indiquant les propriétés les plus simples de la fonction $\Gamma(x)$, de manière à mettre le lecteur sur la voie du beau théorème de M. Weierstrass sur la décomposition d'une fonction transcendante entière en facteurs primaires.

J'aborde enfin les notions de dérivée et d'intégrale définie; mon but n'était pas d'écrire un Traité de Calcul différentiel et intégral; j'ai glissé sur les procédés de calcul, en insistant sur les théorèmes généraux. J. Tannery.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario; diretto da *Davide Besso*, professore di Matematica nel R. Istituto tecnico di Roma. Anno I. Roma, via Nazionale, 230; 1886. In-8°, bimestriel. Prix annuel : 7fr.

Traité de Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire classique; par M. *E. Lebon*, professeur au lycée Charlemagne. IIe Volume, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. Paris, Delalain; 1882. In-8° de 347 pages, atlas de 14 planches. Prix : 12fr.

Le problème d'Euler et les carrés magiques; par M. *Frolow*. Traduit du russe. Paris, Gauthier-Villars; 1884. In-8°, avec atlas de 36 planches. Prix : 2fr, 50.

Les lois de la matière. Essais de Mécanique moléculaire; par M. *L.-J.-A. de Commines de Marsilly*.

ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars; 1884. In-4° de 124 pages. Prix : 9fr.

Traité de Balistique expérimentale; par M. *Hélie*, professeur à l'École d'artillerie de la marine. 2e édition, considérablement augmentée, avec la collaboration de M. *Hugoniot*, capitaine d'artillerie de la marine. Paris, Gauthier-Villars; 1884. 2 vol. in-8° de 448 et de 422 pages. Prix : 18fr.

Courbes et surfaces focales; par M. *A. Boset*. Bruxelles, Hayez; 1884. In-8° de 50 pages. Prix : 1fr,50.

Éléments de Géométrie analytique, rédigés conformément au programme d'admission à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure; par *H. Sonnet*, ancien inspecteur de l'Académie de Paris, et *G. Frontera*, professeur au lycée Charlemagne. 6e édition. Paris, Hachette et Cie; 1885. In-8° de 746 pages. Prix : 8fr.

Compositions d'Analyse et de Mécanique, données depuis 1869 à la Sorbonne pour la licence ès sciences mathématiques, suivies d'Exercices sur les variables imaginaires; par M. *E. Villié*, ancien ingénieur des mines, professeur à l'Institut catholique de Lille. Énoncés et solutions. Paris, Gauthier-Villars; 1885. In-8° de 348 pages. Prix : 9fr.

Électricité et magnétisme; par M. *F. Jenkin*, professeur à l'Université d'Édimbourg. Traduit de l'anglais sur la 7e édition par MM. *H. Berger*, directeur-ingénieur des lignes télégraphiques, et *M. Croullebois*, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon. Paris, Gauthier-Villars; 1885. In-8° de 636 pages. Prix : 12fr.

La théorie du navire; par M. *V. Lutschaunig*, in-

génieur et professeur de construction navale à la section d'Architecture navale de l'Académie impériale et royale du commerce et de la navigation de Trieste, traduit par M. *G.-M. Auradou,* ingénieur de la marine en retraite, sur la 2e édition allemande. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Grand in-8° de 174 pages. Prix : 10fr.

Annuaire pour l'an 1885, publié par le Bureau des Longitudes, contenant les Notices suivantes : Sur la formation de l'univers et du monde solaire, par M. *Faye;* Sur les perturbations, par M. *Tisserand.* Paris, Gauthier-Villars; 1885. In-18 de 880 pages. Prix : 1fr,50.

Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an 1885. Météorologie, Agriculture, Hygiène. Paris, Gauthier-Villars; 1885. In-18 de 600 pages. Prix : 2fr.

Histoire des sciences mathématiques et physiques; par M. *Maximilien Marie,* répétiteur de Mécanique et examinateur d'admission à l'École Polytechnique. T. VI et VII : De Newton à Euler. Paris, Gauthier-Villars; 1885. 2 vol. petit in-8°. Prix : 12fr.

Recueil de formules et de Tables numériques; par M. *J. Hoüel.* 3e édition. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Grand in-8° de 136 pages. Prix : 4fr,50.

Leçons de Statique graphique; par M. *A. Favaro,* professeur à l'Université royale de Padoue, traduites de l'italien par M. *P. Terrier,* ingénieur des arts et manufactures. IIe Partie, Calcul graphique, avec Appendices et Notes du traducteur. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Grand in-8° de 412 pages. Prix : 12fr.

Tirages a part.

Ueber den vierten Gauss'chen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Zur

Theorie der elliptischen Functionen. Von L. Kronecker. Extrait des *Monatsberichte der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*; 1880 et 1881.

Ueber bilineäre Formen mit vier Variabeln. Von L. Kronecker. Aus den *Abhandlungen der königl. preus. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*; 1883.

Die Subdeterminanten symmetrischen Systeme. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Ueber den dritten Gauss'chen Beweis des Reciprocitatsgesetzes für die quadratischen Reste. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. Die Composition Abelschen Gleichungen. Die kubischen Abelschen Gleichungen des Bereichs $(\sqrt{-31})$. *Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Zur Theorie der Formen höherer Stufen. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Beweis einer Jacobi'schen Integralformel. Beweis der Puiseux'schen Satzes*. Von L. Kronecker. Extraits des *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*; 1882, 1883 et 1884.

Introduction à une esthétique scientifique, par M. Ch. Henry. Extrait de la *Revue contemporaine*; 1885.

Méthode pour mener les plans tangents aux surfaces gauches, par M. J. Marchand. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII; 1885.

Équation géométrique des coniques et des quadriques, par M. G. Tarry. Alger, A. Jourdan; 1885.

Les surfaces polaires inclinées, par M. le Dr Scipion Rindi. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IX; 1885.

SUR LES LIGNES DE POURSUITE;

PAR M. E. CESARO.

1. Dans les tracés graphiques, relatifs à la construction des voûtes, alors que l'on cherche à déterminer la poussée due à un ensemble de voussoirs, on rencontre une intéressante déduction de lignes, que nous voulons examiner de près, en nous plaçant à un point de vue abstrait et général. Un point M se meut, dans le plan, suivant une trajectoire quelconque : soit s le chemin parcouru depuis le point fixe A. Ayant désigné par q une fonction de s, déposons en chaque point M, sur l'élément ds, une masse $q\,ds$, et appelons respectivement Q et M_0 la *résultante* et le *centre de gravité* des masses appliquées le long de l'arc AM. Il s'agit d'étudier les rapports existant entre les lignes (M) et (M_0). Tout ce que nous allons dire s'étend, fort naturellement, aux lignes *non planes :* alors (M) doit être considérée comme une ligne quelconque, tracée sur la surface développable dont (M_0) est l'arête de rebroussement ; mais, pour plus de simplicité, nous raisonnerons exclusivement sur des lignes planes.

2. Ayant le point M_0, correspondant à M, si l'on veut le point M'_0, correspondant au point M', infiniment voisin de M, on sait qu'il faut prendre, sur M_0M', le point qui partage ce segment dans le rapport $q\,ds$ à Q. Il en résulte que M_0 *est constamment dirigé vers* M, *et que le rapport des vitesses des deux mobiles* est

$$K = \frac{ds_0}{ds} = \frac{qr}{Q}, \tag{1}$$

où r désigne la distance MM_0. Ainsi (M_0) est une *ligne de poursuite,* relativement à (M). Il est évident, en outre, que, dans tout mouvement de poursuite, les deux trajectoires peuvent être regardées comme ayant entre elles des relations analogues à celles des lignes (M), (M_0); car, le rapport des vitesses étant donné, l'intégration de l'égalité (1) fait connaître, à chaque instant, la valeur de la fonction Q, et, par suite, celle de la masse unitaire q. En d'autres termes, tout mobile, qui en poursuit un autre, peut être *généralement* considéré comme étant, à un moment quelconque, le centre de gravité du chemin parcouru par le mobile poursuivi, ce chemin étant supposé *matérialisé* suivant une certaine loi.

3. Soient respectivement ε_0 et ρ_0 l'*angle de contingence* et le *rayon de courbure* de la ligne (M_0), au point M_0. Le triangle M_0MM' donne

$$(2)\qquad \frac{ds}{\varepsilon_0} = \frac{r}{\sin(\theta - \varepsilon_0)} = \frac{r + dr + ds_0}{\sin\theta},$$

θ étant l'*angle des directions* suivies par les deux mobiles. On déduit de là

$$(3)\qquad \rho_0 = \frac{Kr}{\sin\theta}, \qquad \frac{d(r + s_0)}{ds} = \cos\theta.$$

Si l'on observe, en outre, que la différence $\varepsilon - \varepsilon_0$ des angles de contingence, en deux points correspondants, n'est autre chose que $d\theta$, on a

$$(4)\qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{K}{\rho_0}.$$

Ces formules sont suffisantes pour l'étude des lignes de poursuite. On peut leur adjoindre la relation

$$(5)\qquad \cos\theta = 2K + Q\frac{d}{ds}\frac{K}{q},$$

qu'il est aisé d'obtenir par une transformation simple de (3).

4. Il est vrai que, dans tout ceci, nous avons pris M'_0 entre M_0 et M, ce qui caractérise le mouvement de *poursuite,* proprement dit; mais les formules précédentes sont évidemment applicables à un mouvement de *fuite,* pourvu que l'on remplace ds_0 par $-ds_0$, dans (1) et (3), et, par suite, que l'on change le signe de K, dans (2) et (4). De plus, θ représente le *supplément* de l'angle des vitesses. Un exemple remarquable nous est fourni par la *développée* de la ligne (M), répondant au cas où θ est constamment égal à $\frac{\pi}{2}$. Les formules (2), (3), (4), modifiées comme il vient d'être dit, donnent immédiatement les égalités connues

$$\rho = r = s_0, \qquad \rho_0 = \rho \frac{d\rho}{ds}.$$

Puis, tenant compte de ces relations, l'égalité (1) donne facilement, à moins d'un facteur constant,

$$Q = \frac{1}{\rho}, \qquad q = \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} = -\frac{\rho_0}{\rho^3}.$$

On voit par là que, dans le cas d'une développée, chaque élément doit être chargé proportionnellement à la variation subie par la courbure, le long de l'élément considéré.

5. De la même trajectoire (M) déduisons une ligne de poursuite (M_1), répondant à la condition, plus générale, de θ *constant.* Elle est, suivant la dénomination proposée par Lancret, une *développoïde* de (M). Au moyen des formules ci-dessus, on trouve immédiate-

ment

$$r_1 = \rho \sin\theta, \qquad s_1 = \rho \sin\theta - s \cos\theta, \qquad \rho_1 = \rho \frac{ds_1}{ds}.$$

La première égalité prouve que M_1 appartient à la circonférence décrite sur MM_0 comme diamètre : ce théorème est dû à Réaumur. La deuxième égalité donne la longueur de l'arc de développoïde : rectifié sur MM_1, il est compris entre M_1 et la projection, sur MM_1, du point N, correspondant à M, sur la *développante* de (M). Pour que la ligne (M_1) se réduise à un *point*, il faut et il suffit que s_1 soit constamment nul, et, par suite, que l'on ait

$$(6) \qquad \rho = s \cot\theta.$$

Mais alors la ligne (M), rencontrant les rayons issus de M_1, sous l'*angle constant* θ, n'est autre chose qu'une *spirale logarithmique*, de pôle M_1. Il résulte qu'une telle courbe est *caractérisée* par l'équation (6).

6. Au moyen de la deuxième égalité, la troisième devient

$$\rho_1 = \rho_0 \sin\theta - \rho \cos\theta.$$

Cette formule, due à Minich, retrouvée par M. Habich, montre que les centres de courbure des développoïdes appartiennent à la circonférence décrite sur le rayon de courbure de la développée. Ceci prouve, de plus, que la développoïde, sous l'angle θ, de la développée d'une ligne quelconque, ne diffère pas de la développée de la développoïde, sous le même angle, de la ligne considérée. C'est là un cas particulier du théorème de Lancret, d'après lequel on peut, dans la recherche des développoïdes successives, sous différents angles, d'une ligne donnée, intervertir l'ordre des déductions, sans altérer la dernière développoïde.

7. Lorsque la ligne (M) est donnée par son *équation intrinsèque*

$$F(\rho, s) = o,$$

on a l'équation de sa développoïde, sous l'angle θ, en éliminant ρ et s entre l'égalité qui précède et les égalités

$$\rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds} \sin\theta - \rho\cos\theta, \qquad s_1 = \rho\sin\theta - s\cos\theta,$$

obtenues plus haut. Considérons, par exemple, l'équation

$$(7) \qquad \rho^2 = 2Rs,$$

qui représente une *développante de cercle*. L'élimination indiquée donne l'équation

$$\rho_1^2 = R^2\sin^2\theta - 2Rs_1\cos\theta,$$

réductible à la forme (7), par le changement de s_1 en $\frac{R}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - s_1$. Ainsi les développoïdes d'une développante de cercle sont autant de développantes. Ce résultat est presque évident.

8. On sait, d'ailleurs, que, plus généralement, en vertu du théorème de M. Fouret, la développoïde d'une courbe *cycloïdale* est une courbe *semblable*. Bien que ce théorème ait été démontré, fort simplement, par M. Rouquet, dans les *Nouvelles Annales*, et par M. Mansion, dans la *Nouvelle Correspondance*, nous voulons en donner une autre démonstration, basée exclusivement sur les formules qui précèdent. Dans ce but, il est utile d'observer, avant tout, que, si la ligne (M) est donnée par les équations

$$\rho = \varphi(t), \qquad s = \psi(t),$$

les équations de sa développoïde, sous l'angle θ, sont

$$\rho_1 = \frac{\varphi(t)}{\psi'(t)}[\varphi'(t)\sin\theta - \psi'(t)\cos\theta],$$
$$s_1 = \varphi(t)\sin\theta - \psi(t)\cos\theta.$$

Or on sait que l'équation intrinsèque, générale, des courbes cycloïdales, est

$$a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2,$$

l'origine des arcs étant également éloignée de deux points de rebroussement consécutifs. Rappelons que, lorsque a et b varient, en conservant un *rapport constant*, il en est de même des rayons des cercles générateurs, de sorte que la courbe reste *semblable* à elle-même. Cela posé, à l'équation ci-dessus on peut substituer les suivantes :

$$\rho = b\sin t, \qquad s = a\cos t.$$

Les équations de la développoïde, sous l'angle θ, sont donc

$$\rho_1 = -\frac{b}{a}(b\sin\theta\cos t + a\cos\theta\sin t),$$
$$s_1 = b\sin\theta\sin t - a\cos\theta\cos t.$$

Enfin l'élimination de t donne

$$a_1^2\rho_1^2 + b_1^2 s_1^2 = a_1^2 b_1^2,$$

pourvu que l'on pose

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \sqrt{\cos^2\theta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\theta}.$$

Le théorème de M. Fouret est démontré. Le radical représente aussi le *rapport de similitude* des deux courbes. En y supposant θ variable, on voit que *les diamètres générateurs de toutes les développoïdes sont en raison inverse des diamètres d'une ellipse*. Les axes de

cette ellipse sont les diamètres des cercles générateurs de la courbe et de sa développée. Dans le cas de la *cycloïde,* l'ellipse devient un cercle, et toutes les développoïdes sont *égales* à la courbe primitive.

9. Parmi les points M_1, correspondant à M, sur les différentes développoïdes, il en est un, P, qui constitue, pour la courbe correspondante, un point de rebroussement. D'après les constructions indiquées plus haut, il est à l'intersection des circonférences décrites sur les rayons de courbure de (M) et de sa développée, pris comme diamètres. Il est donc, dans le triangle rectangle ayant pour côtés ces rayons de courbure, la projection du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. La développoïde, à laquelle appartient le point P, sépare toutes les développoïdes en deux classes, suivant qu'elles sont ou ne sont pas des lignes de poursuite proprement dites. Il est intéressant d'étudier le lieu (P), que l'on peut appeler la *ligne de rebroussement* de (M). Voici des exemples :

a. On a vu que *la ligne de rebroussement d'une spirale logarithmique se réduit à un point.*

b. Si (M) est une *développante de cercle,* la ligne (M_0) est, par définition, une circonférence : soient R son rayon, et O son centre. Construisons le triangle OMM_0, rectangle en M_0 et projetons M_0 sur OM : cette projection est le point cherché P. Or nous voyons que

$$OP.OM = R^2.$$

La ligne (P) est donc *inverse* de la développante, par rapport au cercle directeur. Conséquemment, elle est, comme l'a fait remarquer M. Neuberg, une *tractrice polaire.* Ainsi : *la ligne de rebroussement d'une développante de cercle est une tractrice polaire.*

c. Si (M) est une *cycloïde*, on sait que l'hypoténuse du triangle des rayons de courbure est perpendiculaire à la *base* de la courbe, et que celle-ci divise MM_0 en deux parties égales. Il en résulte que P est le symétrique de M, par rapport à la base. Conséquemment : *la ligne de rebroussement d'une cycloïde est une autre cycloïde, symétrique de la première par rapport à la base.*

10. Nous avons, du reste, des formules générales, qui permettent de chercher l'équation intrinsèque de (P), connaissant celle de (M). Prenons comme axes la normale et la tangente à (M), au point M, en les dirigeant de telle sorte que les coordonnées x, y de P soient positives. Soit

$$\tang\omega = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{d\rho}{ds}, \qquad u = \rho\cos\omega.$$

Les constructions nécessaires pour obtenir le point P montrent que u et ω sont les coordonnées polaires de ce point et, par suite, que

$$x = u\cos\omega, \qquad y = u\sin\omega.$$

Lorsque M et P passent aux positions infiniment voisines, *en entraînant les axes,* les coordonnées du second point subissent les variations

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x &= \cos\omega\, du - u\sin\omega\, d\omega = \cos^2\omega\, d\rho - \rho\sin 2\omega\, d\omega,\\ \Delta y &= \sin\omega\, du + u\cos\omega\, d\omega = \sin\omega\cos\omega\, d\rho + \rho\cos 2\omega\, d\omega. \end{aligned}\right.$$

Les formules pour le changement d'axes montrent immédiatement que les variations des coordonnées de P, *par rapport aux anciens axes,* sont

$$dx = \Delta x - \varepsilon y, \qquad dy = \Delta y + \varepsilon x - ds.$$

Si l'on observe que

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho_0},$$

les dernières égalités deviennent

$$(8) \qquad dx = -\rho \sin 2\omega\, d\omega, \qquad dy = \rho \cos 2\omega\, d\omega.$$

On en déduit, en premier lieu,

$$\frac{dy}{dx} = -\cot 2\omega.$$

Par conséquent : *les tangentes à une courbe et à sa ligne de rebroussement, en deux points correspondants, sont également inclinées sur la droite qui joint ces points.*

11. Si l'on a égard à ce théorème, la simple considération de la figure montre que l'angle de contingence de (P) est $\varepsilon + 2\,d\omega$. D'autre part, en élevant au carré et en ajoutant les égalités (8), on voit que l'élément linéaire de la même courbe est, au signe près,

$$(9) \qquad ds' = \rho\, d\omega.$$

Il en résulte que le rayon de courbure de (P) est donné par la formule

$$\rho' = \frac{\rho\, d\omega}{2\,d\omega + \varepsilon} = \frac{\rho^2}{2\rho + \dfrac{ds}{d\omega}}.$$

Or nous avons

$$\omega = \text{arc tang}\,\frac{d\rho}{ds}, \qquad \frac{d\omega}{ds} = \frac{\dfrac{d^2\rho}{ds^2}}{1 + \left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2},$$

pourvu que l'on prenne s comme *variable indépen-*

dante. Donc enfin

$$(10) \qquad \rho' = \frac{\rho^2 \dfrac{d^2\rho}{ds^2}}{1 + \left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2 + 2\rho \dfrac{d^2\rho}{ds^2}}.$$

12. Les formules (9) et (10) sont suffisantes pour la recherche de l'équation intrinsèque de (P). Il faut, pour cela, éliminer ρ et s entre l'équation de (M), la relation (10), et l'égalité qui résulte de l'intégration de (9). Voici des exemples :

a. Une *développante de cercle* est représentée par l'équation (7). Dans ce cas, les formules (9) et (10) donnent

$$\rho' = \frac{R^2\rho}{R^2 - \rho^2}, \qquad s' = R \log \frac{\sqrt{\rho^2 + R^2}}{R}.$$

Éliminons ρ, et supprimons les accents. Il vient

$$\rho = R \frac{\sqrt{e^{\frac{2s}{R}} - 1}}{2 - e^{\frac{2s}{R}}}.$$

C'est l'équation d'une *tractrice polaire*.

b. L'équation intrinsèque de la *chaînette* est

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}.$$

La formule (10) devient

$$\rho' = \frac{2\rho^2}{8\rho - 3a}.$$

D'autre part, l'intégration de (9) donne

$$s' = \frac{a}{4}\left(\frac{2s}{a} + 3 \operatorname{arc\,tang} \frac{2s}{a}\right).$$

L'élimination de ρ et s, entre ces trois égalités, conduit à une équation compliquée.

c. Mais il y a des lignes qui sont, à un certain point de vue, plus générales que la chaînette : on peut les appeler *alysoïdes*. Ce sont les développées des courbes dont l'équation générale est

$$\rho = c\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

Pour $c = a$, cette équation représente une *tractrice*, ou méridienne de la *pseudosphère* : la développée est, alors, une chaînette. Si la grandeur c reste quelconque, on trouve que l'équation de la développée est

$$a\rho = s^2 + c^2.$$

Telle est l'équation générale des alysoïdes. Parmi ces courbes il y en a une qui est fort remarquable : elle répond au cas de $c = \frac{a}{2}$. Alors les formules (9) et (10) deviennent

$$\rho' = \frac{\rho}{4}, \qquad s' = \frac{s}{2},$$

de sorte que *la ligne de rebroussement de cette alysoïde particulière est une autre alysoïde*. Les formules générales, appliquées au cas actuel, permettent d'affirmer, en outre, que *le point de rebroussement, relatif à un point quelconque de l'alysoïde considérée, se trouve à une distance constante de la tangente à la courbe. Sa distance à la normale est égale à la longueur de la courbe, comptée à partir du sommet.*

d. La courbe dont il vient d'être question est loin d'être *caractérisée* par les propriétés énoncées. Il y a, par exemple, la ligne représentée par l'équation

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

qui jouit de propriétés analogues. On trouve, en effet,

$$\rho' = \frac{\rho}{3}, \qquad s' = s.$$

L'équation de la ligne de rebroussement est donc

$$\rho = \frac{a}{6}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

En outre, *la distance de tout point, au point de rebroussement, qui lui correspond, est constante.* On pourrait rechercher, plus généralement, quelles sont les lignes pour lesquelles

$$\rho' = \frac{\rho}{\alpha}, \qquad s' = \frac{s}{\beta}.$$

Par nos formules, le problème est réduit à une simple intégration. Sans le résoudre, nous dirons que l'on doit avoir nécessairement $\alpha - \beta = 2$. Ainsi, dans les deux cas particuliers traités, nous avions

$$\alpha = 4, \qquad \beta = 2; \qquad \alpha = 3, \qquad \beta = 1.$$

13. Pour terminer ces remarques sur la théorie des développoïdes, observons que l'égalité (1) devient

$$\frac{dQ}{Q} + \frac{d\rho}{\rho} = \varepsilon \cot \theta.$$

Par conséquent, si l'on appelle E l'angle des tangentes aux extrémités de l'arc AM ou, avec plus de précision, la déviation angulaire totale du mobile M, on trouve, à moins d'un facteur constant,

$$Q = \frac{e^{\mathrm{E}\cot\theta}}{\rho}, \qquad q = -\frac{\rho_1}{\rho^3}\,\frac{e^{\mathrm{E}\cot\theta}}{\sin\theta}.$$

14. Revenons à l'étude du mouvement de poursuite, proprement dit. Parmi les différentes formes que l'on

peut donner à q, il y en a quelques-unes qui présentent un certain intérêt; mais nous ne nous y arrêterons pas. Ainsi, pour $q = \frac{1}{\rho}$, chaque élément se trouve chargé proportionnellement à l'angle de contingence correspondant, de sorte que le point M_0 est, suivant la dénomination employée par Steiner, le *barycentre de courbure* de l'arc AM. Alors Q n'est autre chose que E. Pour $q = 1$, le point M_0 est, tout simplement, le *centre de gravité* de l'arc AM. Dans ce cas $Q = s$, et les formules trouvées plus haut deviennent

$$K = \frac{ds_0}{ds} = \frac{r}{s}, \qquad \rho_0 = \frac{r^2}{s \sin\theta}, \qquad \cos\theta = 2K + s\frac{dK}{ds}.$$

Elles expriment autant de théorèmes que nous avons eu l'occasion d'énoncer ailleurs. En particulier, ayant projeté N en N′ sur la normale à (M_0), la deuxième formule montre que le centre de courbure de (M_0) se trouve sur la perpendiculaire à MN′, menée par M.

15. *Y a-t-il des trajectoires telles que le centre de gravité du chemin parcouru se déplace avec une vitesse proportionnelle à celle du mobile même?* — Des trois dernières formules, la troisième montre que, pour une telle trajectoire, θ *doit être constant*, ce qui réduit l'équation (4) à $\rho_0 = K\rho$. D'ailleurs, la première formule donne $r = Ks$. Substituant ces deux valeurs, dans la deuxième formule, on obtient

$$\rho = \tfrac{1}{2} s \cot\theta.$$

C'est l'équation intrinsèque de la ligne cherchée. Par comparaison avec (6), on voit que la trajectoire est une *spirale logarithmique*, rencontrant ses rayons vecteurs sous un angle, dont la tangente est double de celle de θ.

16. Reprenons les relations (2), (3), (4). On peut en déduire, par l'élimination de θ, d'autres formules importantes. En effet, en tenant compte de (3), la formule (2) devient

$$\rho_0 = \frac{Kr}{\sqrt{1-\left(K+\frac{dr}{ds}\right)^2}}. \tag{11}$$

Au contraire, si l'on a égard à (2), la différentiation de (3) donne la valeur de $\frac{d\theta}{ds}$; en la substituant dans (4), et en tenant compte de (11), nous parvenons à l'importante formule

$$\rho = \frac{r\sqrt{1-\left(K+\frac{dr}{ds}\right)^2}}{1-\left(K+\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\left(\frac{dK}{ds}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)}, \tag{12}$$

qui sert à la recherche des trajectoires, remplissant certaines conditions.

17. *Quelles sont les lignes, pour lesquelles la masse unitaire q varie proportionnellement au rapport des vitesses?* — En vertu de (1), cela revient à demander : *Quelles sont les lignes pour lesquelles la masse résultante* Q *varie proportionnellement à la distance des mobiles?* — La formule (5) montre immédiatement que, pour ces lignes, $\cos\theta = 2K$, c'est-à-dire que *la composante de la vitesse du mobile poursuivi, suivant la direction de l'autre mobile, est le double de la vitesse de celui-ci.* Pour trouver l'équation intrinsèque de ces trajectoires, employons la relation (11), en y supposant $r = CQ$. Nous avons d'abord

$$K = \frac{ds_0}{ds} = Cq = \frac{dr}{ds}. \tag{13}$$

Les formules (11) et (12) deviennent donc

$$(14) \qquad \rho_0 = -\frac{r\dfrac{dr}{ds}}{\sqrt{1-4\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2}},$$

$$(15) \qquad \rho = \frac{r\sqrt{1-4\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2}}{1-4\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 - 2r\dfrac{d^2r}{ds^2}}.$$

Si, par exemple, r est donné en fonction de s, la relation (15) est l'équation intrinsèque de la trajectoire (M). De même, l'équation (14) représente la ligne (M_0), pourvu qu'on y remplace s en fonction de s_0, ce qui est aisé, puisque, d'après (13), s_0 ne diffère pas de r.

18. Pour montrer une application de ces formules, prenons

$$r = \frac{R}{2}\sin\frac{s}{R}.$$

Comme nous pouvons librement disposer de la constante C, nous la ferons égale à $\frac{1}{2}$, et nous aurons

$$Q = R\sin\frac{s}{R}, \qquad q = \cos\frac{s}{R}.$$

Les formules (14) et (15) deviennent

$$\rho_0 = \frac{R}{4}\cos\frac{s}{R}, \qquad \rho = \frac{R}{3}.$$

D'après la dernière égalité, la ligne (M) est une *circonférence,* de rayon $\frac{R}{3}$. Quant à la première, observons que, à cause de $r = s_0$, on a

$$\cos\frac{s}{R} = \frac{4}{R}\rho_0, \qquad \sin\frac{s}{R} = \frac{2}{R}s_0,$$

et, par suite,

$$4\rho_0^2 + s_0^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Or on sait que l'équation intrinsèque

$$a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2$$

représente, pour $a > b$, une *épicycloïde*, engendrée par le roulement d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}$, sur un cercle de rayon $\frac{ab^2}{a^2-b^2}$. Dans le cas actuel,

$$a = \frac{R}{2}, \qquad b = \frac{R}{4},$$

et les rayons des deux circonférences, *roulette* et *base*, sont respectivement $\frac{R}{12}$ et $\frac{R}{6}$. Remarquons encore que, d'après (13),

$$K = \frac{1}{2}\cos\frac{s}{R} = \frac{1}{2}\cos\theta,$$

et, par suite,

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{1}{3}\widehat{AOM},$$

A étant l'origine des arcs, sur la circonférence (M), et O le centre de celle-ci. En résumé, ayant tracé la circonférence (M), on déterminera M_0 en prenant, au *tiers* de l'arc AM, le point M'; puis, au *quart* de M'M, le point cherché M_0. Le lieu de M_0, coïncidant avec l'enveloppe de M'M, est une épicycloïde à deux rebroussements, situés sur le diamètre perpendiculaire à OA. Si, en chaque point M, on charge l'élément ds proportionnellement à sa projection sur M'M, le centre de gravité de l'arc AM, ainsi chargé, est M_0, et la masse résultante est proportionnelle à la distance MM_0.

19. Nous terminerons cette Note en signalant la corrélation remarquable existant entre (M_0) et (M). La

ligne (M) est la *trajectoire d'un point*, qui *se meut sur une droite*, pendant que celle-ci *enveloppe* (M_0). Corrélativement, la ligne (M_0) est l'*enveloppe d'une droite*, qui *tourne autour d'un point*, pendant que celui-ci *décrit* (M). A ce point de vue, on peut se demander, par exemple, quelle théorie doit être considérée comme correspondant, par dualité, à celle des *développoïdes*. Il suffit, évidemment, de supposer que, au lieu de l'*angle des vitesses*, ce soit la *distance des deux mobiles*, qui se conserve *constante*. Étant donnée une ligne (M_0), on en déduira, de cette manière, une infinité de lignes (M), suivant la valeur attribuée à la constante r. Pour une quelconque de ces lignes, les formules (2) et (3) donnent

$$r = \rho_0 \operatorname{tang} \theta, \tag{16}$$

d'où il résulte que les normales aux différentes lignes passent par le centre de courbure de (M_0), et, par conséquent, que *les tangentes enveloppent, à chaque instant, une parabole*. Ce théorème est fort connu en Cinématique, et nous ne le citons que pour le comparer au théorème de *Réaumur*, dont il est le corrélatif. Tous les autres résultats de la théorie des mouvements plans sont renfermés dans les formules générales (2), (3), (4). Ainsi l'on démontre facilement, au moyen de ces formules, que *les centres de courbure des trajectoires considérées se trouvent, à chaque instant, sur une conique*. En effet, la dérivation logarithmique de (16) nous donne, d'abord

$$d\theta = -\sin\theta\cos\theta \frac{d\rho_0}{\rho_0};$$

d'où, en désignant par ρ_1 le *rayon de courbure de la développée* de (M_0), nous déduisons

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\rho_0^2}\rho_1.$$

Ce résultat, substitué dans (4), conduit à l'égalité cherchée

$$\rho = \frac{\rho_0^2}{(\rho_0 - \rho_1 \sin\theta \cos\theta) \cos\theta}.$$

Maintenant il est aisé d'obtenir l'équation du lieu des centres de courbure. En prenant respectivement comme axes des x et des y les normales à (M_0) et à sa développée, on trouve l'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{\rho_1}{\rho_0} xy - \rho_1 y = 0,$$

facile à discuter.

20. Dans les applications du principe de dualité à des questions géométriques, *non projectives,* on voit surgir bien des difficultés. Cela doit arriver inévitablement, puisque, dans la Géométrie *euclidienne*, telle que l'expérience inconsciemment acquise nous l'a fait établir, les modes de mesure des *angles* et des *distances* ont des bases essentiellement diverses. Ainsi l'on se demandera avec raison comment il peut se faire que la *parabole, enveloppe instantanée* des tangentes aux trajectoires des *points d'une droite mobile,* corresponde, par dualité, à la *circonférence, lieu instantané* des points de contact des *droites d'un faisceau mobile.* Il est vrai que la dualité existe dans les modes de génération ; mais elle cesse d'être visible dans les propriétés des lignes engendrées. De même, sous beaucoup de points de vue, la *spirale logarithmique* correspond, par dualité, à la *tractrice*. La première ligne admet le *point* parmi ses développoïdes : les autres développoïdes *sont des spirales*. Dans la déduction corrélative, une tractrice admet la *droite* parmi les lignes qui en dérivent ; mais les autres lignes dérivées *ne sont pas des tractrices*. Ce qui vient

gâter entièrement la corrélation dont il s'agit est la non-existence du théorème de *Lancret*, transformé d'après le principe de dualité. Aussi nous proposons-nous de reprendre l'étude des lignes de poursuite, en utilisant les idées et les formules de la *Géométrie générale*, qui ramènent les moyens de mesure à de simples opérations projectives, de manière à rétablir, dans toute sa perfection, le principe de dualité.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE ;

PAR M. E. JAGGI,
Étudiant à la Faculté de Besançon.

Soit

$$(1) \qquad y^m + P_1 y^{m-1} + P_2 y^{m-2} + \ldots + P_m y = 0$$

l'équation différentielle linéaire sans second membre la plus générale. Je me propose de donner une méthode pour former l'équation aux produits $u = y_1 y_2$ des intégrales de cette équation.

Soit M l'ordre de cette équation.

Désignons, pour abréger, par S_h^k la somme

$$y_1^{(h)} y_2^{(k)} + y_1^{(k)} y_2^{(h)},$$

en sorte que

$$S_h^k = S_k^h,$$

et convenons en outre que, lorsque $k = h$, on écrira simplement

$$S_h^h = y_1^h y_2^h.$$

Cela posé, dérivons M fois l'équation $u = y_1 y_2$. Nous

pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
u &= S_0^0,\\
u' &= S_1^0,\\
u'' &= S_2^0 + 2S_1^1,\\
u''' &= S_3^0 + 3S_2^1,\\
u^{\text{IV}} &= S_4^0 + 4S_3^1 + 6S_2^2,\\
u^{\text{V}} &= S_5^0 + 5S_4^1 + 10S_3^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u^{\text{M}} &= S_{\text{M}}^0 + \text{M}S_{\text{M}-1}^1 + \frac{\text{M}(\text{M}-1)}{1.2}S_{\text{M}-2}^2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Tout revient à trouver assez d'équations entre les S pour les éliminer.

Or remarquons que y^m est donné en fonction de $y^{m-1}, y^{m-2}, \ldots, y$; y^{m+1} est donné en fonction de y', $y'', \ldots, y^m$, c'est-à-dire en fonction de $y, y', y'', \ldots, y^{m-1}$, par une simple différentiation de l'équation (1); et ainsi de suite. On voit ainsi que toutes les quantités S_h^k dans lesquelles l'un des indices au moins est supérieur à $(m-1)$ s'exprimeront en fonction des quantités S_i^j où les deux indices sont inférieurs à m. Les seules inconnues sont donc ces dernières quantités. Leur nombre est $\frac{m(m+1)}{2}$ (i et j varient tous deux de 0 à $m-1$). Il faudra donc que le système (2) contienne $\frac{m(m+1)}{2}+1$ équations pour éliminer les S_i^j.

Par suite, il faudra prendre $\text{M} = \frac{m(m+1)}{2}$.

Les équations (2) étant alors écrites et ne contenant que les S^j, où i et j sont inférieurs ou égaux à $m-1$, l'élimination de ces quantités se fera immédiatement, car il est facile de voir que les équations sont linéaires. Le résultat se présentera donc sous la forme d'un déterminant de $(\text{M}+1)^2$ éléments dans lequel les $u, u', \ldots, u^{\text{M}}$

n'entreront que comme éléments de la première colonne; par conséquent on peut énoncer ce théorème :

Les produits deux à deux des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre m sans second membre sont solutions d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $\frac{m(m+1)}{2}$.

Ce qui précède donne le moyen de former cette équation.

Remarque. — Sachant que les produits $u = y_1 y_2$ peuvent être donnés par une équation différentielle, on vérifie facilement que cette équation admet comme solutions les carrés des y, ce qui devait être *a priori*; je dis que, réciproquement, si l'on peut amener l'équation en y^2 à être linéaire, on aura l'équation en $y_1 y_2$.

En effet, soit

$$u = y_1 y_2.$$

Je dis que u est racine de l'équation linéaire en y^2. Posons

$$y = y_1 + y_2.$$

on a

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2u;$$

y^2, y_1^2, y_2^2 sont solutions de l'équation linéaire, donc $2u$ et par suite u en est aussi une solution.

Or il est facile de voir que l'équation en y^2 se présente immédiatement avec l'ordre m sous forme rationnelle et entière, mais non linéaire. Il faudra donc différentier $\frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}$ fois pour arriver à l'équation linéaire en u. Ceci donne un second moyen de former l'équation cherchée.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. E. JAGGI,
Licencié ès sciences mathématiques de la Faculté de Besançon.

Dans son Mémoire sur les équations différentielles linéaires (¹), M. Appell a donné une méthode générale pour former l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale une fonction entière des intégrales d'une équation donnée. Cette Note a pour objet de donner une méthode pour former l'équation qui admet pour intégrale la fonction

$$u = \frac{y_1 y_2 \ldots y_n}{y_{n+1} y_{n+2} \ldots y_{n+p}}$$

de $p+n$ intégrales de l'équation différentielle

$$(1)\quad F(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + a_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + a_m y = 0.$$

Posons

$$v = y_1 y_2 \ldots y_n,$$
$$w = y_{n+1} y_{n+2} \ldots y_{n+p}.$$

On sait former les équations qui admettent respectivement pour solutions les fonctions v et w. Si l'on désigne par $z_1, z_2, \ldots, z_m$ un système fondamental de solutions de (1), on peut poser

$$y_k = C_{k1} z_1 + C_{k2} z_2 + \ldots + C_{km} z_m,$$

et l'on voit que v contient un nombre de termes linéai-

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1881.

rement indépendants égal à

$$N = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

L'équation différentielle linéaire $\varphi(v) = 0$ qui donne v est donc d'ordre N.

De même l'équation $\psi(w) = 0$ qui donne w est d'ordre

$$P = \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots p}.$$

Cela posé, ayant formé les équations

$$\varphi_N(v) = 0, \qquad \psi_P(w) = 0,$$

la question revient à former l'équation qui donne

$$u = \frac{v}{w}.$$

On voit qu'il suffit pour cela d'éliminer w entre les deux équations

$$(2) \qquad \psi_P(w) = 0, \qquad \varphi_N(uw) = 0.$$

Pour cela, différentions N — 1 fois la première et P — 1 fois la seconde; nous formons ainsi un système de N + P équations linéaires et homogènes à N + P inconnues

$$w, \quad \frac{dw}{dx}, \quad \frac{d^2 w}{d^2 x}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{N+P-1} w}{dx^{N+P-1}}.$$

Le déterminant Δ de ces équations égalé à zéro sera la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (2) aient une solution commune.

L'équation $\Delta = 0$ est l'équation en u cherchée; c'est une équation non linéaire d'ordre

$$N + P - 1 = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} + \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots p} - 1.$$

Elle admet, bien entendu, comme intégrales non seulement les fonctions telles que

$$u_{np} = \frac{y_1 y_2 \ldots y_n}{y_{n+1} y_{n+2} \ldots y_{n+p}},$$

mais toutes celles obtenues en supposant dans u que

$$1, 2, 3, \ldots, (n+p)$$

fonctions y sont les mêmes.

SUR L'ENVELOPPE DE CERTAINES DROITES VARIABLES

[SUITE (1)];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

LA SURFACE COMPRISE ENTRE L'ARC ab ET SA CORDE EST CONSTANTE.

Dans ce cas, les aires élémentaires décrites par les droites ea et eb étant égales, on a, en appelant ε l'angle de contingence de l'enveloppe au point e,

$$\varepsilon . ea^2 = \varepsilon . eb^2$$

ou

$$ea = eb.$$

Le point e est donc le milieu de ab.

Si la courbe donnée C se compose d'un système de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est une hyperbole ayant ces deux droites pour asymptotes.

---

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, 1883, p. 252.— Dans les figures du présent Article, les gros traits indiquent les lignes données, les traits fins les lignes de construction, enfin les traits pointillés les lignes qui n'interviennent que dans la démonstration.

La différence entre l'arc ab et sa corde est constante.

La démonstration est de tous points analogue à celle qui a été donnée [1] pour le cas où la somme de l'arc et de la corde est constante; on trouve que le point e est, dans ce cas, *le point de contact sur ab du cercle inscrit dans le triangle formé par cette corde et les tangentes à ses extrémités*.

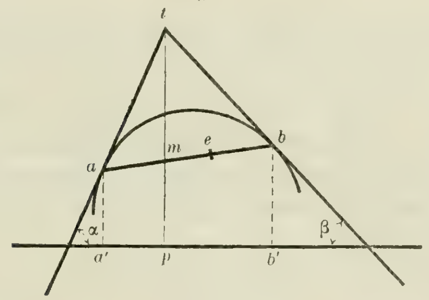
Il en résulte que, si la courbe C se compose de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est un cercle tangent à ces deux droites.

La projection de la corde ab sur un axe fixe est constante.

Soit $a'b'$ cette projection (*fig.* 1). On a toujours

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at.ae}{bt.be}.$$

Fig. 1.



D'ailleurs

$$d(a) = \frac{d(a')}{\cos\alpha}, \qquad d(b) = \frac{d(b')}{\cos\beta},$$

et comme $d(a') = d(b')$, par hypothèse,

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

---

(1) *Loc. cit.* p. 254.

Donc

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{at.ae}{bt.be} \qquad \text{ou} \qquad \frac{ae}{be} = \frac{bt.\cos\beta}{at.\cos\alpha} = \frac{b'p}{a'p} = \frac{bm}{am};$$

de là résulte que

$$ae = bm,$$

ce qui détermine le point e.

En particulier, si la courbe donnée est une parabole ayant son axe perpendiculaire à $a'b'$, la droite tm étant parallèle à l'axe passe par le milieu de ab, et le point e se confond alors avec ce point milieu, c'est-à-dire avec le point où ab touche son enveloppe si cette droite forme avec la parabole un segment d'aire constante; de là ce théorème :

Si une droite mobile forme avec une parabole un segment d'aire constante, la projection de ce segment de droite sur la directrice est constante.

L'ARC ab DÉTERMINE, AVEC DEUX DROITES ISSUES D'UN POINT FIXE, UN SECTEUR D'AIRE CONSTANTE.

Les aires élémentaires engendrées par les droites ao et bo (*fig.* 2) tournant d'un angle infiniment petit autour du point o, devant être égales, puisque l'aire $oacb$ est constante, nous avons, en abaissant du point o les perpendiculaires $o\mu$ et $o\nu$ sur at et bt,

$$d(a).o\mu = d(b).o\nu;$$

donc

$$\frac{o\nu}{o\mu} = \frac{ae.at}{be.bt}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{ae}{be} = \frac{bt.o\nu}{at.o\mu},$$

ou, en abaissant des points a et b les perpendiculaires ap et bq sur ot,

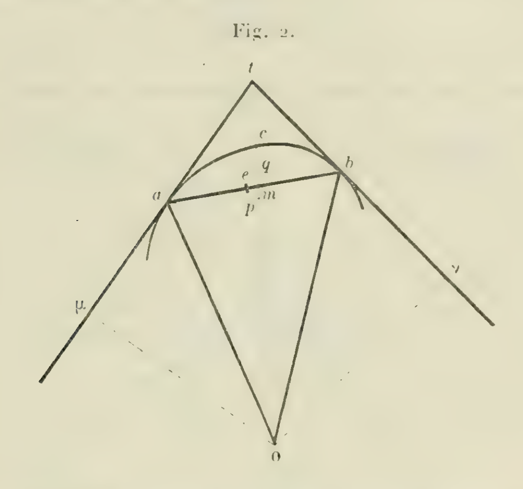
$$\frac{ae}{be} = \frac{ot.bq}{ot.ap} = \frac{bq}{ap} = \frac{bm}{am}.$$

c'est-à-dire

$$ae = bm.$$

La construction se réduit donc à ceci : *ot coupant ab au point m, porter ae = bm.*

Fig. 2.



Si la courbe donnée se compose de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est une parabole tangente à ces droites.

Si la courbe donnée est une conique de centre o, le point m, et, par suite, le point e, vient se confondre avec le milieu de ab, d'où l'on déduit ce théorème :

Si une corde ab se déplace dans une conique de centre o de telle façon que le triangle oab ait une aire constante, le secteur d'ellipse oab a également une aire constante.

Les parallèles a deux directions fixes menées par les points a et b se coupent sur une courbe donnée.

Soient am et bm ces droites (*fig.* 3). Puisqu'elles restent parallèles à des directions fixes, on a, en sup-

posant xy tangente à la courbe décrite par le point m,

$$\frac{d(b)}{d(m)} = \frac{by}{my}, \qquad \frac{d(m)}{d(a)} = \frac{mx}{ax};$$

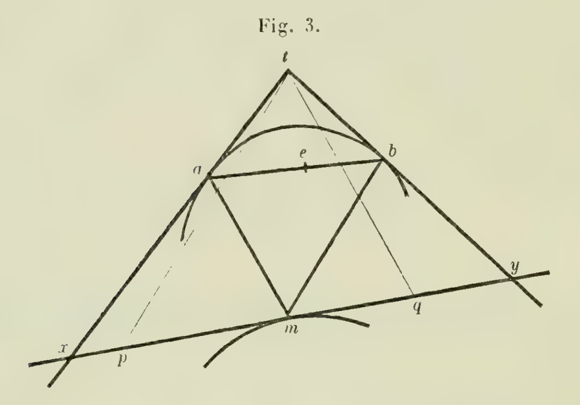
d'ailleurs

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at.ae}{bt.be}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, nous avons

$$\frac{at.ae.by.mx}{bt.be.my.ax} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{ae}{be} = \frac{bt.my.ax}{at.by.mx}.$$

Fig. 3.



Tirons tp parallèle à mb, tq parallèle à ma; nous avons

$$mp = \frac{bt.my}{by}, \qquad mq = \frac{at.mx}{ax};$$

donc

$$\frac{ae}{be} = \frac{mp}{mq},$$

expression qui fournit une facile construction du point e.

Comme application, supposons que la courbe donnée soit un système de deux droites concourantes tp et tq, que le point m doive décrire la droite pq, enfin que les directions fixes soient précisément celles de tp et tq; la

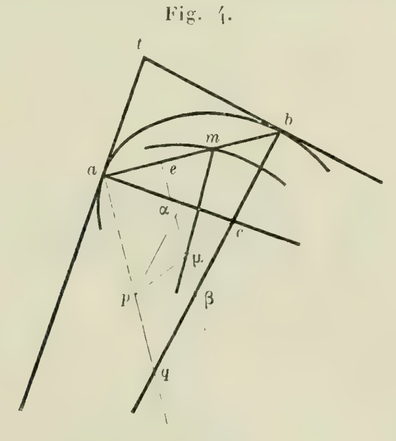
courbe enveloppe sera alors une parabole tangente à tp et tq aux points p et q. De là ce théorème :

tp et tq étant tangentes à une parabole aux points p et q, ab, tangente à cette courbe au point e, coupant tp et tq aux points a et b, ab est divisé par le point e dans le même rapport que pq par le pied de la droite qui joint le point t au milieu de ab.

La corde *ab* est coupée par une courbe fixe en segments de rapport constant.

Soit m le point où le segment ab est coupé par la courbe fixe (*fig.* 4); le rapport $\frac{am}{bm}$ est constant; donc, si les normales $a\alpha$ et $b\beta$ à la première courbe, $m\mu$ à la

Fig. 4.



seconde, coupent en α, β et μ la normale menée par le point e à l'enveloppe de ab, on a

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \frac{am}{bm}.$$

En a élevons à ab la perpendiculaire aq qui coupe $e\mu$

au point p; nous avons

$$\frac{ap}{qp} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \frac{am}{bm};$$

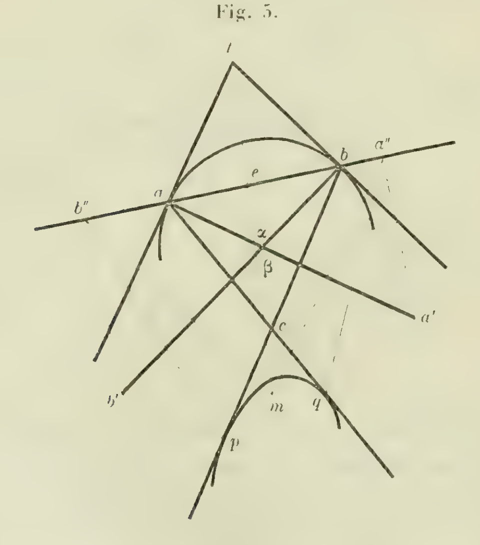
donc la droite mp est parallèle à bq; de là, la construction suivante :

Élever à ab la perpendiculaire ap; tirer mp parallèle à $b\beta$, cp coupant $m\mu$ au point μ, abaisser de μ sur ab la perpendiculaire μe.

Les tangentes menées des points a et b a une courbe fixe forment un angle constant.

Soient aq et bp ces tangentes (*fig.* 5); les normales aa' et bb' à la première courbe coupent aux points a' et

Fig. 5.



b' les normales qa' et pb' à la seconde. L'angle pcq étant constant, les angles de contingence aux points p et q

sont égaux : par suite

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{aa'}{bb'}.$$

D'ailleurs, si $e\alpha$ est normale à l'enveloppe cherchée, on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

Donc

$$\frac{a\alpha}{aa'} = \frac{b\beta}{bb'},$$

ou, si $a'a''$ et $b'b''$ sont perpendiculaires à ab,

$$\frac{ae}{aa''} = \frac{be}{bb''}.$$

On déduit de là que, si $a''m$ est parallèle à at et $b''m$ à bt, le point m se trouve sur te. On peut d'ailleurs remarquer que, le quadrilatère $aqa'a''$ étant inscriptible, on a

$$\widehat{aqa''} = \widehat{aa'a''},$$

et comme $\widehat{aa'a''} = \widehat{tab}$, puisque ces angles ont leurs côtés perpendiculaires, on a aussi

$$\widehat{aqa''} = \widehat{tab}.$$

De même

$$\widehat{bpb''} = \widehat{tba}.$$

On pourra donc énoncer comme suit la construction du point e :

Faire $\widehat{aqa''} = \widehat{tab}$ *et* $\widehat{bpb''} = \widehat{tba}$; *mener* $a''m$ *parallèle à* at *et* $b''m$ *parallèle à* bt : *tirer* mt *qui coupe* ab *au point* e.

Si la courbe enveloppée par aq et bp se réduit à un point, on retombe sur un cas déjà traité [1]. Mais la construction précédente appliquée à ce cas particulier est moins simple que la construction donnée à l'endroit cité. Les conditions spéciales du problème conduisent en effet, dans ce cas, à des simplifications qui n'ont pas leur équivalent dans le cas général.

Si l'angle atb des tangentes en a et b à la courbe considérée [2] est constant, si la droite ab touche son enveloppe au point e et si α et β sont les centres de courbure qui répondent aux points a et b, nous avons vu (3e série, t. II, p. 258) que *le point o étant tel qu'on voie de ce point les rayons de courbure* $a\alpha$ *et* $b\beta$ *sous des angles droits, les angles aob et toe ont même bissectrice.*

Mais le point o peut être imaginaire; c'est ce qui arrive lorsque les cercles de diamètres $a\alpha$ et $b\beta$ ne se coupent pas. La construction qui résulte du théorème précédent devient alors illusoire. Voici un nouveau théorème qui donne la solution du problème dans tous les cas :

Si les droites $t\alpha$ *et* $t\beta$ *coupent respectivement aux points* α' *et* β' *le cercle circonscrit au triangle atb, les droites* $a\beta'$ *et* $b\alpha'$ *se coupent en un point g dont la projection sur la droite ab est précisément le point e.*

En effet [3], appelons pour le moment e' la projection du point g sur la droite ab. Nous avons $\widehat{eag} = \widehat{bt\beta}$ et $\widehat{ebg} = \widehat{at\alpha}$ (même mesure); les triangles rectangles eag

---

[1] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 256.

[2] Il est bien entendu qu'ici, comme dans tout ce qui précède, cette courbe peut être un système de deux courbes distinctes décrites séparément par les points a et b.

[3] Le lecteur est prié de faire la figure.

et $bt\beta$ d'une part, ebg et $at\alpha$ de l'autre, sont donc semblables; par suite,

$$\frac{ae'}{ge'} = \frac{bt}{b\beta}, \qquad \frac{be'}{ge'} = \frac{at}{a\alpha},$$

d'où

$$\frac{ae'}{be'} = \frac{bt.a\alpha}{at.b\beta}.$$

Or, en se reportant à l'endroit cité, on voit que

$$\frac{ae.at}{be.bt} = \frac{a\alpha}{b\beta};$$

donc

$$\frac{ae'}{be'} = \frac{ae}{be},$$

et le point e' se confond avec le point e.

Remarquons que le cercle circonscrit au triangle atb a pour diamètre la droite qui joint le point t au point de rencontre des normales $a\alpha$ et $b\beta$.

SUR LE CERCLE ORTHOPTIQUE [1];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

---

1. Soient donnés un cercle C et deux axes rectangulaires Ox et Oy par le centre O de ce cercle. Il y a une infinité de rectangles inscrits dans ce cercle et ayant leurs côtés respectivement parallèles à Ox et Oy, et dans chacun de ces rectangles une conique inscrite K ayant ses axes dirigés suivant Ox et Oy. Pour chacune des coniques K, le cercle C est orthoptique.

Prenons sur le cercle C un point fixe M (α, β), et

---

[1] On sait que ce nom a été anciennement donné au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique.

cherchons l'enveloppe des polaires π de ce point par rapport aux coniques K.

R étant le rayon du cercle C, ρ le demi-côté parallèle à Ox du rectangle inscrit, l'équation de la conique K est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{R^2 - \rho^2} = 1.$$

La polaire du point M par rapport à cette conique a pour équation

$$(1) \qquad (R^2 - \rho^2)\alpha x + \rho^2 \beta y = \rho^2 (R^2 - \rho^2)$$

ou, en posant $\rho^2 = \lambda$,

$$\lambda^2 - \lambda(\alpha x - \beta y + R^2) + R^2 \alpha x = 0,$$

droite dont l'enveloppe a pour équation

$$(\alpha x - \beta y - R^2)^2 - 4 R^2 \alpha x = 0$$

ou

$$(\alpha x - \beta y)^2 - 2 R^2 (\alpha x + \beta y) = 0;$$

c'est une parabole P tangente à Ox et Oy aux points A et B où ces axes sont coupés par la tangente au cercle C menée par le point M. L'angle AOB étant droit, le foyer de cette parabole s'obtient, d'après une propriété bien connue, en abaissant du point O une perpendiculaire sur la droite AB; par suite, ce foyer se confond avec le point M. Abaissons du point M les perpendiculaires Ma et Mb sur Ox et Oy; la droite ab joignant les projections du foyer sur deux tangentes à la parabole P est la tangente au sommet de cette courbe.

Donc :

L'enveloppe des polaires du point M *relativement aux coniques* K *est la parabole qui a pour foyer le point* M *et pour tangente au sommet la droite qui joint les projections du point* M *sur les axes* Ox *et* Oy.

Cette parabole est d'ailleurs tangente aux axes, aux points A *et* B *où ils sont coupés par la tangente au cercle* C *menée par le point* M.

2. Le sommet de cette parabole s'obtient en projetant le point M sur la droite ab, mais on a ainsi le point où la droite ab touche son enveloppe, car le segment ab, égal à R, est de longueur constante, et le point M est le centre instantané de rotation correspondant. Il en résulte que la parabole P est tangente à l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement E qui est enveloppée par la droite ab.

Donc :

Toutes les paraboles P, *correspondant aux divers points du cercle* C (*les axes* Ox *et* Oy *restant fixes*), *sont tangentes à l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement* E, *et chacune d'elles touche cette hypocycloïde par son sommet* [1].

3. La polaire π du point M, relativement à la conique K, touche au point M′ la polaire réciproque C′ du cercle C par rapport à la même conique.

Or nous avons démontré [2] que *le point* M′ *est le pied de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur sa polaire*.

Lors donc que l'on considérera toutes les coniques K du système défini plus haut, on aura le lieu du point M′ en abaissant du point M des perpendiculaires sur les

---

(1) Nous tenons à dire que la rédaction de cette Note est antérieure à la publication de la Note *Sur quelques courbes enveloppes* de M. Weill (3e série, t. III, p. 377) où se trouve ce même théorème à propos d'autres considérations (Ex. I, 1er cas).

(2) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 461.

polaires π correspondantes, c'est-à-dire que le lieu du point M' sera la podaire de l'enveloppe des droites π, par rapport au point M; or nous venons de voir que cette enveloppe est une parabole P de foyer M; la podaire de cette parabole par rapport à son foyer M est la tangente au sommet, c'est-à-dire la droite ab.

Donc :

Le lieu des points où les polaires du point M *supposé fixe, prises par rapport aux coniques* K, *touchent les polaires réciproques du cercle* C *relativement à ces coniques, est la droite qui joint les projections du point* M *sur les axes* Ox *et* Oy.

Nous représenterons cette droite par la lettre D.

4. Ainsi que nous l'avons déjà vu, le segment ab de la droite D, compris entre Ox et Oy, étant constant, *cette droite enveloppe l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement* E.

5. Considérons un des rectangles ci-dessus définis, inscrit dans le cercle C, et la conique K inscrite, comme il a été dit, dans ce rectangle.

A chaque point M du cercle C correspond une droite D définie plus haut, dont l'équation est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1. \qquad (2)$$

Le point M' où la polaire de M relativement à K touche la polaire réciproque du cercle C, relativement à K, est, d'après ce qui vient d'être vu, à la rencontre de cette polaire [équation (2)] et de la droite D. Or de (1) et (2) on tire très aisément

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\rho^2}{R^2}.$$

Par suite, *le point M′, correspondant à chaque point M du cercle C, divise le segment ab correspondant dans un rapport constant.* Quand le point M coïncide avec l'un des sommets du rectangle considéré, le point M′ est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur le segment *ab* correspondant.

On transforme immédiatement ce théorème en le suivant :

Lorsqu'un segment de droite de longueur égale au rayon du cercle C *glisse entre les axes* Ox *et* Oy, *tous les points de cette droite engendrent des coniques qui sont les polaires réciproques du cercle* C *par rapport aux coniques* K.

6. En projetant les sommets de chaque rectangle inscrit sur leurs polaires, nous obtenons quatre points où la polaire réciproque C′ correspondante touche l'hypocycloïde E définie plus haut.

Donc :

L'enveloppe des polaires réciproques C′ *du cercle* C *par rapport aux coniques* K *est l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement* E *que chaque courbe* C′ *touche en quatre points.*

7. Étant donnés le cercle C et les axes Ox et Oy, au point M correspondent une droite D et une parabole P, définies plus haut.

Si, le point M étant fixe, on fait tourner l'angle droit xOy autour de son sommet O, à chaque position de cet angle correspondent, pour le point M, une droite D et une parabole P.

On voit immédiatement que :

Pour le même point M, *les droites* D *relatives aux diverses positions de l'angle droit* xOy *passent toutes par un même point qui est le milieu du rayon* OM.

De plus, pour le même point M, les paraboles P relatives aux diverses positions de l'angle droit xOy ont toutes *pour foyer le point* M *et sont toutes vues du point* O sous un angle droit.

La polaire du point O par rapport à toutes ces paraboles est invariable; c'est la tangente au cercle C, menée par le point M.

Puisque, pour chacune de ces paraboles, le point M est le foyer et le point O un point de la directrice, la droite élevée perpendiculairement à MO en son milieu N est une tangente.

Donc :

L'enveloppe des paraboles P *est la droite élevée perpendiculairement à* MO *en son milieu* ([1]).

Cette droite est parallèle à la tangente AB au cercle C.

Nous avons vu que les tangentes au sommet de ces paraboles sont les droites D, et que ces droites D passent toutes par le milieu N de OM; d'ailleurs les sommets s'obtiennent en projetant le foyer M sur les droites D correspondantes; donc :

Pour le même point M, *le lieu des sommets des paraboles* P, *relatives aux diverses positions de l'angle droit* xOy, *est le cercle qui a* MN *pour diamètre.*

8. Étant donnés le point M et une des coniques K,

([1]) Cela résout la question 1512 (3e série, t. III, p. 496).

nous avons appelé M′ le point où la polaire du point M par rapport à K touche la polaire réciproque du cercle C par rapport à la même conique.

Le point M étant fixe, supposons alors que la conique K tourne autour de son centre O. A chaque position de cette conique correspond un point M′. Cherchons le lieu de ces points M′.

Nous avons vu que le point M′ est sur la droite D qui joint les projections a et b de M sur les axes Ox et Oy de la conique K, et qu'il divise le segment ab dans un rapport constant. Or, en faisant coïncider le point M avec le point de rencontre des tangentes en deux sommets consécutifs de la conique K, on voit que

$$\frac{a\mathrm{M}'}{\mathrm{M}'b} = \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2},$$

Y et X étant les demi-axes de la conique K, dirigés suivant Ox et Oy.

Considérons alors le point fixe M et une position quelconque de la conique K qui, d'ailleurs, reste de grandeur constante.

Abaissons sur les axes Ox et Oy les perpendiculaires Ma et Mb; tirons ab et prenons sur cette droite le point M′, tel que

$$\frac{a\mathrm{M}'}{\mathrm{M}'b} = \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2};$$

les points a et b décrivant le cercle qui a OM pour diamètre et la droite ab passant constamment par le centre N de ce cercle, on voit tout de suite que le lieu du point M′ est un cercle G du centre N.

Donc :

Pour le même point M, *le lieu des points* M′, *relatifs aux diverses positions de la conique* K, *est un cercle* G *dont le centre est au milieu* N *du rayon* OM.

9. Cherchons maintenant l'enveloppe de la polaire π du point M par rapport à la conique K, lorsque cette conique tourne autour de son centre O.

La droite π passe, d'après ce que nous savons, par le point M' et est perpendiculaire à la droite MM'; son enveloppe est donc une courbe dont la podaire relativement au point M est le cercle G; c'est, par conséquent, une conique ayant pour foyers les points M et O, et pour sommets les points où le cercle G coupe la droite MO.

Donc :

Pour le même point M, *l'enveloppe des polaires* π, *relatives aux diverses positions de la conique* K, *est une conique ayant pour foyers les points* O *et* M *et pour sommets les points où le cercle* G *coupe la droite* OM.

On voit immédiatement que les asymptotes de cette conique sont les diamètres du cercle G qui aboutissent aux points de contact de ce cercle et des tangentes à ce cercle issues soit du point O, soit du point M.

10. Nous avons vu (n° 3) que le point M' est à la rencontre de la droite D qui joint les projections de M sur Ox et Oy et de la polaire π de M par rapport à K, et, d'autre part (même numéro), que le point M' est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur π. Il en résulte, d'après la réciproque du théorème de Simson, que le point M est sur le cercle circonscrit au triangle formé par π avec Ox et Oy.

Donc :

Tout point du cercle orthoptique d'une conique est situé sur le cercle circonscrit au triangle formé par la

polaire de ce point relativement à cette conique, avec les axes de la conique.

On déduit de là que :

Le segment de la polaire d'un point du cercle orthoptique, compris entre les axes de la conique, est vu de ce point sous un angle droit.

11. On sait que toutes les coniques inscrites dans un même quadrilatère sont vues de deux points fixes sous des angles droits.

Donc :

Les cercles orthoptiques de toutes les coniques inscrites dans un même quadrilatère ont même axe radical.

Ce théorème a, croyons-nous, été énoncé par Plücker.

12. Appliquant la méthode des polaires réciproques à un théorème dû à M. Kœnigs (1), en prenant pour centre de la transformation le point d'où l'on voit les couples de points en involution, dont il est parlé dans ce théorème, sous des angles droits, nous avons obtenu cet autre théorème :

Si les coniques K *et* H *sont vues du point* A *sous des angles droits, et si* K_1 *est la polaire réciproque de* K *par rapport à* H, *le segment déterminé par* K_1 *sur la polaire du point* A, *par rapport à* H, *est vu de ce point sous un angle droit.*

De là cette propriété du cercle orthoptique :

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 74.

Si deux coniques K *et* H *ont même cercle orthoptique* C, *et si* K_1 *est la polaire réciproque de* K *par rapport à* H, *le segment déterminé par* K_1 *sur la polaire d'un point quelconque de* C *par rapport à* H *est vu de ce point sous un angle droit.*

SUR LA SÉRIE DE LAMBERT;

PAR M. E. CESARO.

1. D'après une formule connue, on peut écrire

$$(1)\qquad \frac{1}{p} + v_p = \frac{1}{2}\log\frac{p+1}{p-1},$$

où

$$(2)\quad v_p = \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \frac{1}{7p^7} + \ldots < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p}\right).$$

Dans l'égalité (1), donnons successivement à p les valeurs u_1, u_2, ..., u_n, et additionnons, après avoir posé

$$(3)\qquad \begin{cases} U_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}, \\ V_n = v_{u_1} + v_{u_2} + \ldots + v_{u_n}. \end{cases}$$

Il vient

$$(4)\qquad U_n + V_n = \frac{1}{2}\log\frac{(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1)}{(u_1-1)(u_2-1)\ldots(u_n-1)}.$$

2. La formule (4) est susceptible de nombreuses applications. En particulier, on peut l'utiliser pour évaluer approximativement la somme des n premiers termes de la *série de Lambert*, c'est-à-dire

$$S_n = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^n}{1-x^n}.$$

x étant *compris entre* 0 *et* 1. Prenons, à cet effet,

$$u_p = \frac{1+x}{x^p}\,\frac{1-x^p}{1-x},$$

de sorte que

$$\frac{u_{p+1}-1}{u_p-1} = x, \quad U_n = \frac{1-x}{1+x}\,S_n.$$

La formule (4) devient

$$(5) \qquad U_n + V_n = \frac{1}{2}\log\left(1+2x\,\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

3. On reconnaît sans peine, au moyen de l'inégalité (2), que, pour n indéfiniment croissant, V_n tend vers une limite *finie* V, supérieure à V_n. D'autre part, en vertu de la même inégalité, on a

$$\begin{aligned} V - V_n &< \frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{p=\infty}\left(\frac{1}{u_p-1} - \frac{1}{u_p+1} - \frac{2}{u_p}\right) \\ &< \frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{p=\infty}\left(\frac{x}{u_{p-1}} - \frac{1}{u_p}\right) \end{aligned}$$

ou bien

$$(6) \qquad V - V_n < \frac{1}{6}\left[\frac{x}{u_n} - (1-x)(U-U_n)\right].$$

Or, à cause de

$$u_p > \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1}{x^p}, \qquad U - U_n = \sum_{p=n+1}^{p=\infty}\frac{1}{u_p},$$

on a

$$U - U_n > \frac{1-x}{1+x}\sum_{p=n+1}^{p=\infty} x^p = \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{1-x^n}{1-x}\,\frac{x}{u_n}.$$

On peut donc, au lieu de (6), écrire, à plus forte raison,

$$V - V_n < \frac{x^{n+1}}{6u_n}, \quad V_n = V - \frac{\theta x^{n+1}}{6u_n},$$

θ étant une *fraction proprement dite.*

4. Par substitution dans (5), on trouve

$$\frac{1-x}{1+x}S_n = \frac{1}{2}\log\left(1+2x\frac{1-x^n}{1-x}\right)+\frac{\theta x^{n+1}}{6u_n}-V,$$

c'est-à-dire

$$(7)\quad \sum_{p=1}^{p=n}\frac{x^p}{1-x^p}=\frac{1+x}{1-x}\log\sqrt{\frac{1}{2}+x\frac{1-x^n}{1-x}}+\frac{\theta x^{2n+1}}{6(1-x^n)}+\text{const.}$$

Par *constante* nous entendons une fonction de x, *indépendante de n*. Pour n infini, on obtient

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{x^p}{1-x^p}=\frac{1+x}{1-x}\log\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{1+x}{1-x}}+\text{const.},$$

ce qui nous donne l'interprétation de la *constante*. D'après cela, l'égalité (7) peut prendre cette autre forme

$$(8)\quad \sum_{p=n+1}^{p=\infty}\frac{x^p}{1-x^p}=\frac{1+x}{1-x}\log\sqrt{\frac{1+x}{1+x-2x^{n+1}}}+\frac{\theta x^{2n+1}}{6(1-x^n)}.$$

5. Si, après avoir multiplié par $1-x$ les membres de (7), on fait $x=1$, on trouve la formule connue

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\log\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\theta}{6n}.$$

D'ailleurs, l'application *directe* de la formule (4) à l'évaluation de la somme des n premiers termes de la *série harmonique* permet d'obtenir des expressions beaucoup plus approchées. Si l'on fait, par exemple, $u_p=p+1$, en ne considérant que $n-1$ termes dans les séries (3), on trouve

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\log\sqrt{n(n+1)}+\frac{\theta}{6n(n+1)}.$$

6. Pour une valeur *donnée* de x, on peut toujours

trouver la somme de la *série de Lambert*, avec une approximation aussi grande qu'on le désire, en faisant usage de la formule (8), dans laquelle on attribue à n une valeur suffisamment grande. Proposons-nous, par exemple, de calculer la somme

$$S = \frac{1}{10-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{10^3-1} + \frac{1}{10^4-1} + \ldots,$$

avec *sept* décimales exactes. Il suffit de prendre $n = 3$ dans (8), après quoi il vient

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \frac{11}{18}\log\frac{5500}{5499} = 0,1223242\ldots$$

Cet exemple admet une vérification facile. Le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal doit, en effet, représenter le *nombre des diviseurs de n* pour les *quarante-six* premières valeurs de n.

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie descriptive; par *F. I. C.* 2e édition. Grand in-18. Paris, Poussielgue frères; 1884.

Cet Ouvrage donne non seulement la solution de 400 questions proposées dans les *Éléments de Géométrie descriptive* du même auteur, mais encore celle de 500 nouveaux exercices.

L'hyperboloïde à une nappe, le paraboloïde hyperbolique, le tore, les conoïdes et les hélicoïdes y sont traités avec détail, et 100 questions proposées à divers examens ont été ajoutées aux *problèmes de récapitulation*.

Une *Table analytique* permet de trouver facilement les exercices qui se rapportent à une surface ou à un genre donnés. Enfin, 659 figures sont intercalées dans le texte.

Éléments de Géométrie, comprenant des notions sur les courbes usuelles et de nombreux exercices; par *F.*

J. J. 5e édition. Grand in-18. Paris, Poussielgue frères; 1885.

Ces *Éléments de Géométrie* exposent les connaissances exigées pour le brevet supérieur d'instruction primaire, pour le baccalauréat ès sciences et pour le baccalauréat spécial.

Quatre Livres sont consacrés à la Géométrie plane, trois à la Géométrie dans l'espace, et un huitième aux courbes usuelles. Chaque Livre est terminé par un grand nombre d'exercices, comprenant des théorèmes à démontrer et des problèmes à résoudre.

Un *Appendice* donne des notions sur diverses théories : polygones étoilés, transversales, rapport anharmonique, divisions harmoniques, polaires, figures homothétiques, axes radicaux, théorèmes de Guldin, sections coniques, méthode de sommation pour l'évaluation des volumes, et diverses applications exigées par le programme de l'enseignement spécial.

Cours de Mécanique; par *Despeyrous,* ancien professeur de la Faculté des Sciences de Toulouse, avec des Notes par M. *G. Darboux,* membre de l'Institut : 2 vol. grand in-8°, de x-458 et 616 pages. Paris, A. Hermann; 1884-1886. Prix : 22fr.

Ce Cours se recommande aux étudiants de nos Facultés, non seulement par l'ordre parfait qui règne dans l'ensemble, mais encore par le soin minutieux que l'auteur a apporté dans les détails. Les discussions des problèmes y sont menées jusqu'au bout, condition bien précieuse pour un livre destiné à servir de guide aux élèves.

La Ire Partie traite de la Statique, la IIe de la Cinématique, la IIIe de la Dynamique du point matériel, la IVe de la Dynamique des systèmes matériels et la Ve de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique.

Les Notes de M. Darboux, inédites en grande partie, sont relatives aux sujets suivants : la composition des forces, les centres de gravité, le système de quatre forces en équilibre, l'équilibre astatique, les lignes géodésiques de l'ellipsoïde, le mouvement d'une figure invariable, l'appareil à ligne droite de M. Hart, la brachistochrone pour un point matériel pesant,

une loi particulière de la force signalée par Jacobi, les lois de Kepler, le tautochronisme eu égard au frottement, la théorie des forces centrales, le mouvement d'un point sur une surface de révolution, l'extension du théorème d'Ivory sur l'attraction des ellipsoïdes, l'herpolhodie et la théorie de Poinsot, le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe, les percussions et le choc des corps, les rapports de la théorie des moments d'inertie avec celle des surfaces homofocales.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. 1re série, t. V, in-4°. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 25fr.

Histoire des Sciences mathématiques et physiques; par M. *Maximilien Marie*, répétiteur de Mécanique et examinateur d'admission à l'École Polytechnique. T. VII et VIII : d'Euler à Lagrange. Petit in-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 6fr.

Introduction a l'étude de l'Électricité statique; par MM. *Bichat* et *Blondlot*, professeurs à la Faculté des sciences de Nancy. In-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 4fr.

Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique; par M. *G.-A. Bjerknes*, professeur à l'Université de Christiania. Grand in-8°, avec un portrait d'Abel. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 7fr.

Cours de Mécanique et Machines professé a l'École Polytechnique; par M. *Bresse*, 2 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 24fr.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ÉLECTRICITÉ, AVEC LES PRINCIPALES APPLICATIONS; par M. *R. Colson,* capitaine du génie. In-18 jésus. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 3^{fr},75.

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES; par M. *Ch. Hermite,* membre de l'Institut. In-4°. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 7^{fr},50.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES MESURES ÉLECTRIQUES; par M. *H.-R. Kempe,* ingénieur des télégraphes. Traduit de l'anglais sur la 3e édition, par M. *H. Berger,* directeur ingénieur des lignes télégraphiques. In-8° de 650 pages avec 146 figures dans le texte et de nombreuses Tables. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 12^{fr}.

TRAITÉ D'ANALYSE; par M. *H. Laurent,* examinateur d'admission à l'École Polytechnique. T. I. Calcul différentiel : applications analytiques et géométriques. In-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Prix : 10^{fr}.

THÉORIE DE L'ÉLIMINATION ENTRE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES AU MOYEN DES DÉTERMINANTS; par M. *P. Mansion,* professeur à l'Université de Gand. In-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1884. Prix : 3^{fr},50.

TEORIA ANALITICA DELLE FORME GEOMETRICHE FONDAMENTALI. Lezioni date nella R. Università di Torino, dal prof. *Enrico d'Ovidio.* In-8°. Torino, Ermanno Loescher; 1885. Prezzo : lire 4.

ELEMENTI DI GEOMETRIA; di *A. Sannia* ed *E. d'Ovidio,* professori nella Università di Napoli e Torino. 6a edizione, interamente rifatta. In-8°, XVI-594 pagine, 365 figure intercalate nel testo. Napoli, B. Pellerano; 1886. Prezzo : lire 6.

DÉVELOPPEMENTS NOUVEAUX SUR QUELQUES PROPOSITIONS DE FERMAT;

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. On sait, d'après un théorème de Fermat, démontré par Euler, que : *si le nombre p, compris dans la forme linéaire $8q+1$, est premier, ou composé de facteurs premiers de cette forme, p est la somme d'un carré et d'un double carré.* En d'autres termes, on sait que, p étant comme il vient d'être dit, on peut toujours satisfaire, par des valeurs entières de x et y, à l'équation indéterminée

$$(1) \qquad 2x^2+y^2=p.$$

Un corollaire, que nous allons d'abord ajouter à cette importante proposition, consiste en ce que : *un nombre donné $p=8q+1$ étant la somme d'un carré et d'un double carré premiers entre eux, le nombre*

$$3q=\frac{3(p-1)}{8}$$

est la somme d'un nombre triangulaire et du double d'un nombre triangulaire.

Pour démontrer cette propriété, nous poserons d'abord l'identité

$$3(2x^2+y^2)=2(x+y)^2+(y-2x)^2,$$

où il y a lieu d'observer que, l'équation (1) étant vérifiée, x est nécessairement un nombre pair, et y un nombre

impair. Nous pouvons donc poser une relation telle que

$$3(8q+1) = 2(2a+1)^2 + (2b+1)^2,$$

où a et b sont entiers, et d'où résulte l'égalité

$$3q = 2\cdot\frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2},$$

constituant la propriété énoncée.

On aura ainsi

$$p = \frac{8}{3}\left(a^2+a+\frac{b^2+b}{2}\right)+1,$$

a et b étant tels que l'expression de q, et conséquemment celle de p, se réduisent à des nombres entiers.

Des relations

$$y+x = 2a+1, \qquad y-2x = 2b+1,$$

subsistant entre les entiers a, b, x, y, on déduit

$$x = \tfrac{2}{3}(a-b), \qquad y = \tfrac{2}{3}(2a+b)+1,$$

d'où, par identité,

$$2x^2+y^2 = \frac{8}{3}\left(a^2+a+\frac{b^2+b}{2}\right)+1.$$

On conclut de là que toutes les solutions entières de l'équation (1) sont renfermées dans la formule

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\left(\frac{2a-2b}{3}\right)^2+\left(\frac{4a+2b+3}{3}\right)^2 \\ &\qquad = \frac{8}{3}\left(a^2+a+\frac{b^2+b}{2}\right)+1, \end{aligned}\right.$$

où l'on attribuera à a et b des valeurs entières telles que son second membre se réduise à la valeur de p (ce qui est toujours possible, d'après ce qui précède). La recherche de a et b se trouvera d'ailleurs quelque peu facilitée par la considération que, x et y devant être

entiers, les valeurs numériques de $a - b$ et de $2a + b$ doivent être divisibles par 3.

La détermination du carré et du double carré en lesquels se décompose p se trouve ainsi ramenée directement à celle du nombre triangulaire et du double triangulaire en lesquels se décompose le nombre plus petit $3q$.

On reconnait facilement que cela ne cessera pas d'avoir lieu si, parmi les facteurs premiers de p, il s'en trouve qui soient compris dans l'une quelconque des formes $8q - 1$, $8q \pm 3$, pourvu que chaque facteur de cette espèce soit affecté d'un exposant pair, et que p renferme au moins un facteur premier $8q + 1$ plus grand que l'unité. En ce cas, x et y ne seront plus premiers entre eux.

Pour $p = 3^2.17 = 153$, par exemple, on a, en faisant $a = 1$, $b = 10$ dans la formule (2),

$$2.6^2 + 9^2 = \tfrac{8}{3}(2.1 + 55) + 1 = 8.19 + 1 = 153.$$

Pour $p = 7^2.73 = 3577$, on a

$$2.42^2 + 7^2 = \tfrac{8}{3}(2.28 + 3403) + 1 = 8.447 + 1 = 3577.$$

ce qui correspond au cas de $a = -18$, $b = 45$, dans la formule (2).

Pour $p = 3^2.5^2.41 = 9225$, on a

$$2.60^2 + 45^2 = \tfrac{8}{3}(2.28 + 3403) + 1 = 8.1153 + 1 = 9225.$$

ce qui correspond au cas de $a = 8$, $b = 82$.

2. Un théorème de Fermat, démontré par Lagrange, établit que : *tout nombre premier, compris dans la forme* $8q + 3$, *est la somme d'un carré et d'un double carré.*

Ce théorème, d'après les principes connus, s'étend à

tout nombre p de la forme $8q+3$, composé d'un nombre impair de facteurs premiers de cette forme, et d'un nombre quelconque de facteurs premiers $8q+1$.

D'après cela, l'équation indéterminée

$$2x^2+y^2=p,$$

où p est tel qu'il vient d'être dit, est toujours résoluble en nombres entiers impairs $x=2a+1$, $y=2b+1$, et peut être représentée par l'identité

$$2(2a+1)^2+(2b+1)^2=8\left(a^2+a+\frac{b^2+b}{2}\right)+3.$$

On voit que le nombre $q=\frac{p-3}{8}$ est ici la somme d'un triangulaire et d'un double triangulaire, et que toutes les solutions entières de l'équation considérée sont renfermées dans l'identité que nous venons d'écrire, moyennant des valeurs convenables des indéterminées a et b.

Nous ne devons pas omettre d'ajouter que la précédente décomposition de q en nombres triangulaires avait été signalée incidemment par Euler, qui l'énonce comme une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que $8q+3$ soit un nombre premier ([1]).

3. Dans un précédent article, où il était question des nombres qui sont la somme de deux carrés, nous avons fait connaître une importante propriété de ces nombres, par laquelle la racine de chacun des carrés composants s'exprime par la différence entre le nombre considéré et un nombre qui est la somme de deux triangulaires ([2]).

([1]) Voir les *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, t. VII, p. 229.

([2]) Voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 369; 1885.

Nous allons signaler ici une propriété analogue, relative aux nombres p considérés dans les n°s 1 et 2 qui précèdent.

Cette propriété consiste en ce que : *si un nombre p, impair, ou double d'un impair, est décomposable en un carré et un double carré, en sorte que l'on ait*

$$p = 2x^2 + y^2,$$

les racines x, y des carrés composants seront exprimables par le système de formules

$$x = p - \frac{1}{3}\left[m(m+1) + \frac{2n(2n-1)}{2}\right],$$

$$y = p - \frac{2}{3}\left[\frac{m(m+1)}{2} + n(n+1)\right],$$

m et n étant deux entiers convenablement déterminés.

La vérification est facile, et nous laisserons au lecteur le soin de développer les calculs relatifs. Pour plus de simplicité, et puisque c'est le cas qu'il importe surtout de considérer, on peut admettre que x et y sont premiers entre eux; mais on reconnaîtra sans peine que cette restriction n'est pas nécessaire.

Exemples :

$p = 8.1 + 3 = 11;\quad \begin{cases} m = 4, \\ n = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11 - \frac{1}{3}(20 + 10) = 1, \\ y = 11 - \frac{2}{3}(10 + 2) = 3; \end{cases}$

$p = 8.2 + 1 = 17;\quad \begin{cases} m = 6, \\ n = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 17 - \frac{1}{3}(42 + 3) = 2, \\ y = 17 - \frac{2}{3}(21 + 0) = 3; \end{cases}$

$p = 8.2 + 3 = 19;\quad \begin{cases} m = 6, \\ n = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 19 - \frac{1}{3}(42 + 6) = 3, \\ y = 19 - \frac{2}{3}(21 + 6) = 1, \end{cases}$

$p = 2.11 = 22;\quad \begin{cases} m = 7, \\ n = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 22 - \frac{1}{3}(56 + 1) = 3, \\ y = 22 - \frac{2}{3}(28 + 2) = 2, \end{cases}$

$p = 8.4 + 1 = 33;\quad \begin{cases} m = 8, \\ n = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 33 - \frac{1}{3}(72 + 21) = 2, \\ y = 33 - \frac{2}{3}(36 + 6) = 5; \end{cases}$

$$p = 2.17 = 34;\quad \begin{cases} m = 9, \\ n = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 34 - \frac{1}{3}(90 + 3) = 3, \\ y = 34 - \frac{2}{3}(45 + 0) = 4; \end{cases}$$

$$p = 2.19 = 38;\quad \begin{cases} m = 7, \\ n = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 38 - \frac{1}{3}(56 + 55) = 1, \\ y = 38 - \frac{2}{3}(28 + 20) = 6; \end{cases}$$

. . . .

4. D'après un théorème de Fermat, démontré par Euler, on peut affirmer que : *si un nombre donné p, compris dans la forme linéaire $6q + 1$, est premier, ou composé de facteurs premiers de cette forme, ce nombre est la somme d'un carré et d'un triple carré.*

Un corollaire qu'il y a lieu d'ajouter à cette proposition consiste en ce que : *p étant comme il vient d'être dit, le nombre $3q = \frac{p-1}{2}$ est la somme d'un triangulaire et d'un triple triangulaire.*

Soit, en effet, l'équation

$$(3) \qquad 3x^2 + y^2 = p,$$

subsistant, pour $p = 6q + 1$, en nombres entiers x, y, premiers entre eux ; ces nombres seront nécessairement de différente parité, et y sera premier avec 3.

Posons l'identité

$$4(3x^2 + y^2) = 3(x + y)^2 + (3x - y)^2;$$

nous en conclurons aussitôt l'existence d'une relation telle que

$$4(6q + 1) = 3(2a + 1)^2 + (2b - 1)^2,$$

pour des valeurs entières de a et b, et nous obtiendrons

$$3q = 3\,\frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 - b}{2},$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Il y a lieu de remarquer ici que le nombre triangulaire

$\frac{b^2+b}{2}$, qui entre dans l'expression de $3q$, doit être un multiple de 3; on a ainsi une condition propre à faciliter la décomposition de $3q$ en nombres triangulaires, et, par suite, la décomposition de p en carrés, selon l'équation (3). Cette condition, au reste, revient à ce que nous avons déjà remarqué, c'est-à-dire que y doit être premier avec 3.

Les égalités

$$x+y=2a+1, \qquad 3x-y=2b+1$$

donnent

$$x=\frac{a+b+1}{2}, \qquad y=\frac{3a-b+1}{2},$$

où a et b seront de différente parité (ce qui constitue une nouvelle condition propre à simplifier la recherche des nombres triangulaires en lesquels se décompose $3q$). Par ces expressions de x et y, l'équation (3) se trouve transformée en l'identité

$$3\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2+\left(\frac{3a-b+1}{2}\right)^2=6\left(\frac{a^2+a}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2+b}{2}\right)+1,$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &3\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2+\left(\frac{3a-b+1}{2}\right)^2\\ &\quad=3(a^2+a)+b^2+b+1.\end{aligned}\right.$$

On voit par là que le nombre considéré $p=6q+1$ peut toujours être représenté par la forme indiquée par le second membre de cette identité, où l'on sait que a et b sont de différente parité, et que b^2+b est divisible par 3. Il en résulte que toutes les solutions entières de l'équation (3) rentreront dans l'identité (4), où l'on pourra toujours assigner à a et b des valeurs entières propres à identifier son second membre avec la valeur donnée de p.

Il est aisé de voir que ce qui précède continue d'avoir lieu lorsque p renferme des facteurs de la forme $6q - 1$, pourvu que chaque facteur premier de cette forme s'y trouve élevé à une puissance paire, et que p renferme au moins un facteur premier $6q + 1$ plus grand que l'unité. En ce cas, x^2 et y^2 auront pour diviseur commun un carré qui sera également diviseur de p.

C'est ainsi que, pour $p = 5^2.13 = 325$, on a

$$3.10^2 + 5^2 = 6\left(28 + \frac{78}{3}\right) + 1 = 3.56 + 156 + 1 = 325,$$

ce qui correspond à l'hypothèse de $a = 7$, $b = 12$, dans la formule (4).

On remarquera encore que la transformation de l'équation (3) en l'égalité (4) continue de subsister si, au lieu du nombre considéré p, on prend son triple, c'est-à-dire le nombre $3(6q + 1)$; cela tient à ce que le facteur 3, quoique non compris dans la forme linéaire $6q + 1$, n'en appartient pas moins à la forme quadratique $3x^2 + y^2$. En ce cas, le nombre $b^2 + b$ ne sera plus divisible par 3.

On a, par exemple, pour $p = 3.19 = 57$,

$$3.4^2 + 3^2 = 3.12 + 20 + 1 = 57,$$

ce qui répond aux valeurs $a = 3$, $b = 4$, dans la formule (4).

5. Il nous reste à signaler, à l'égard de l'équation (3), la propriété remarquable dont jouissent les racines x, y, de pouvoir s'exprimer très simplement par la différence entre p et une fonction linéaire déterminée de certains nombres triangulaires.

Cette propriété, analogue à celle que nous avons constatée plus haut à l'égard de l'équation (1), se rattache, de même que celle-ci, à un fait général sur lequel nous ne nous arrêterons pas en ce moment. Elle consiste en

ce que : *si un nombre p, impair, ou quadruple d'un impair, est décomposable en un carré et un triple carré, en sorte que l'on ait*

$$p = 3x^2 + y^2,$$

les racines x, y des carrés composants seront exprimables par le système de formules

$$x = p - \frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{3n(3n-1)}{2}\right],$$

$$y = p - \frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)}{2} + 3\,\frac{n(n+1)}{2}\right],$$

à l'aide de valeurs entières convenables attribuées à m et n.

La vérification ne présente pas de difficulté.

Exemples :

$$p = 4;\quad \begin{cases} m = 3, \\ n = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2}(6 + 0) = 1, \\ y = 4 - \frac{1}{2}(6 + 0) = 1; \end{cases}$$

$$p = 7;\quad \begin{cases} m = 4, \\ n = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 - \frac{1}{2}(10 + \frac{6}{3}) = 1, \\ y = 7 - \frac{1}{2}(10 + 0) = 2; \end{cases}$$

$$p = 12;\quad \begin{cases} m = 5, \\ n = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 - \frac{1}{2}(15 + \frac{21}{3}) = 1, \\ y = 12 - \frac{1}{2}(15 + 3.1) = 3; \end{cases}$$

$$p = 13;\quad \begin{cases} m = 6, \\ n = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 13 - \frac{1}{2}(21 + \frac{3}{3}) = 2, \\ y = 13 - \frac{1}{2}(21 + 3.1) = 1; \end{cases}$$

$$p = 19;\quad \begin{cases} m = 6, \\ n = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 19 - \frac{1}{2}(21 + \frac{45}{3}) = 1, \\ y = 19 - \frac{1}{2}(21 + 3.3) = 4; \end{cases}$$

$$p = 21;\quad \begin{cases} m = 8, \\ n = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 21 - \frac{1}{2}(36 + \frac{6}{3}) = 2, \\ y = 21 - \frac{1}{2}(36 + 0) = 3; \end{cases}$$

$$p = 28;\quad \begin{cases} m = 7, \\ n = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 28 - \frac{1}{2}(28 + \frac{78}{3}) = 1, \\ y = 28 - \frac{1}{2}(28 + 3.6) = 5. \end{cases}$$

. . . .

Note. — Les propriétés qui viennent d'être considérées à l'égard des équations (1) et (3), et celles qui

font l'objet de l'article cité au n° 3, pouvant trouver quelques applications utiles dans la théorie des nombres, nous pourrons y revenir en étendant la question.

NOTE SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS;

PAR M. ÉMILE LEMOINE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous avons indiqué (voir *Comptes rendus du Congrès de Rouen, de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, p. 126; 1883) la simplicité de certaines équations se rapportant aux propriétés des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, lorsque l'on exprimait les coefficients de ces équations en fonction des rayons de ces cercles, et, d'autre part, nous avons montré (voir *Congrès de Blois*, p. 49; 1884) l'utilité de considérer les points associés (1): la présente Note en fournira de nouveaux exemples.

Nous nous rapportons aux élégantes constructions géométriques démontrées par M. Gérono (voir *Nouvelles Annales*, p. 220; 1865), pour les points de contact du cercle des neuf points avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle, et nous adopterons ici les mêmes notations et les notations analogues que nous indiquons ici.

ABC le triangle considéré;
a, b, c, les milieux de BC, AC, AB;

---

(1) Si α, β, γ sont les coordonnées homogènes d'un point O, les point associés O_a, O_b, O_c ont respectivement pour coordonnées $-\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha, -\beta, \gamma$; $\alpha, \beta, -\gamma$.

a', b', c' les points de contact de BC, AC, AB avec le cercle inscrit;

a'_a, b'_a, c'_a les points de contact de BC, AC, AB avec le cercle exinscrit tangent au côté BC; de même a'_b, b'_b, c'_b; a'_c, b'_c, c'_c;

H, G, M les points d'intersection respectivement de cb, $c'b'$; de ac, $a'c'$; de ab, $a'b'$;

H_a, G_a, M_a les points d'intersection respectivement de cb, $c'_a b'_a$; de ac, $a'_a c'_a$; de ab, $a'_a b'_a$; de même H_b, G_b, M_b; H_c, G_c, M_c.

Soient r, r_a, r_b, r_c les rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle.

Les trois droites Ha', Gb', Mc' ont pour équations

$$\frac{a}{r_a}(r_b + r_c - 2r_a)\xi + \frac{b}{r_b}(r_b - r_c)\eta + \frac{c}{r_c}(r_c - r_b)\zeta = 0, \quad \ldots,$$

et *se coupent en d', point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points.*

Les coordonnées de d' sont

$$\frac{r_a}{a}(r_b - r_c)^2, \quad \frac{r_b}{b}(r_c - r_a)^2, \quad \frac{r_c}{c}(r_a - r_b)^2,$$

ou

$$\frac{p-a}{a}(b-c)^2, \quad \frac{p-b}{b}(c-a)^2, \quad \frac{p-c}{c}(a-b)^2.$$

Les trois droites $H_a a'_a$, $G_a b'_a$, $M_a c'_a$ ont respectivement pour équations

$$\frac{a}{r}(r_b + r_c + 2r)\xi + \frac{b}{r_c}(r_b - r_c)\eta + \frac{c}{r_b}(r_c - r_b)\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}(r_b + r)\xi - \frac{b}{r_c}(2r_c + r - r_b)\eta + \frac{c}{r_b}(r_b + r)\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}(r_c + r)\xi + \frac{b}{r_c}(r_c + r)\eta - \frac{c}{r_b}(2r_b + r - r_c)\zeta = 0,$$

et *se coupent au point d'_a de contact du cercle des neuf*

points et du cercle exinscrit tangent au côté BC *et au prolongement des deux autres.*

d'_a a pour coordonnées

$$-\frac{r}{a}(r_b - r_c)^2, \quad \frac{r_c}{b}(r + r_b)^2, \quad \frac{r_c}{c}(r + r_c)^2$$

ou

$$-\frac{p}{a}(b - c)^2, \quad \frac{p - c}{b}(a + c)^2, \quad \frac{p - b}{c}(a + b)^2.$$

H, G, M sont respectivement les *associés* du point situé à l'infini

$$\frac{b - c}{a}, \quad \frac{c - a}{b}, \quad \frac{a - b}{c},$$

et par conséquent AH, BG, CM sont parallèles.

De même, H_a, G_a, M_a sont les *associés* du point situé à l'infini

$$\frac{c - b}{a}, \quad -\frac{a + c}{b}, \quad \frac{a - b}{c},$$

et par suite AH_a, BG_a, CM_a sont parallèles.

$b'c'$ a pour équation

$$-\frac{a}{r_a}\xi + \frac{b}{r_b}\eta + \frac{c}{r_c}\zeta = 0;$$

de même $a'c'$, $a'b'$, ...

$b'_a c'_a$, $c'_a a'_a$, $a'_a b'_a$ ont respectivement pour équations

$$\frac{a}{r}\xi + \frac{b}{r_c}\eta + \frac{c}{r_b}\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}\xi + \frac{b}{r_c}\eta - \frac{c}{r_b}\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}\xi - \frac{b}{r_c}\eta + \frac{c}{r_b}\zeta = 0.$$

Remarquons que nous avons désigné par a, b, c les milieux des côtés BC, AC, AB et aussi, dans les équations, par a, b, c *comme à l'ordinaire* les longueurs des

côtés BC, AC, AB, mais il ne peut évidemment résulter aucune amphibologie de ce double emploi de lettres.

Les trois droites Ad'_a, Bd'_b, Cd'_c se coupent au point λ qui a pour coordonnées

$$\frac{(b-c)^2}{a(p-a)},\quad \frac{(a+c)^2}{b(p-b)},\quad \frac{(a+b)^2}{c(p-c)}.$$

Les trois droites Ad'_a, Bd'_c, Cd'_b se coupent au point λ_a qui a pour coordonnées

$$-\frac{(b+c)^2}{ap},\quad \frac{(c-a)^2}{b(p-c)},\quad \frac{(a-b)^2}{c(p-b)},\quad \ldots.$$

Les trois droites $A\lambda_a$, $B\lambda_b$; $C\lambda_c$ se coupent en d'.

Les trois droites $A\lambda$, $B\lambda_c$, $C\lambda_b$ se coupent en d'_a; etc.

L'axe d'homologie de ABC et de $d'_a d'_b d'_c$ qui est aussi l'axe d'homologie de ABC et de $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ est la droite

$$\xi+\eta+\zeta=0,$$

qui joint les pieds des bissectrices extérieures.

L'axe d'homologie de ABC et de $d' d'_c d'_b$ qui est aussi l'axe d'homologie de ABC et de $\lambda\lambda_c\lambda_b$ est la droite

$$-\xi+\eta+\zeta=0;$$

qui joint les pieds de deux bissectrices; etc.

L'équation de $d'_b d'_c$ est

$$a\xi[bc-4p(p-a)]+bc(b+c)(\eta+\zeta)=0,$$

l'équation de $d' d'_c$ est

$$(\xi-\eta)ab(a-b)+[ab-4(p-a)(p-b)]\zeta=0;$$

l'équation de $\lambda_b\lambda_c$ est

$$a(b+c)(p-b)(p-c)[4p(p-a)-bc]\xi \\ +p(p-a)bc(b-c)^2(\eta+\zeta)=0;$$

etc.

Soient

D le point où BM coupe AC;
E le point où AM coupe BC;
D_a le point où BM_a coupe AC;
E_a le point où AM_a coupe BC.

DE passe en d' et y est la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points; elle a pour équation

$$\frac{a}{b-c}\xi + \frac{b}{c-a}\eta + \frac{c}{a-b}\zeta = 0.$$

DE passe par les points $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$; $\frac{(b-c)^2}{a}$, $\frac{(c-a)^2}{b}$, $\frac{(a-b)^2}{c}$, et les coordonnées d'un quelconque de ses points peuvent s'exprimer par

$$\frac{(\delta-a)(b-c)^2}{a}, \quad \frac{(\delta-b)(c-a)^2}{b}, \quad \frac{(\delta-c)(a-b)^2}{c},$$

δ variant avec le point.

D_aE_a passe par le point d'_a, y est la tangente commune au cercle exinscrit tangent à BC et au cercle des neuf points.

L'équation de D_aE_a est

$$\frac{a}{c-b}\xi - \frac{b}{a+c}\eta + \frac{c}{a+b}\zeta = 0.$$

Remarque. — Toutes les fois que, dans une équation ou dans l'expression des valeurs des coordonnées homogènes d'un point, etc., les quantités

$$p, \quad p-a, \quad p-b, \quad p-c$$

entreront d'une façon homogène, les égalités

$$pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

prouvent que p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ peuvent y être remplacés par $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_a}$, $\frac{1}{r_b}$, $\frac{1}{r_c}$ et réciproquement.

L'identité $a = p - (p-a)$ montre alors que, dans toute formule, a, b, c peuvent être remplacés par

$$\rho\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right),\quad \rho\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}\right),\quad \rho\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right),$$

ρ disparaissant dans les expressions homogènes.

Application. — La formule

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

donne

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{1}{r}\frac{1}{r_a}}{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right)}}$$

ou

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{r r_b r_c}{r_a(r_b-r)(r_c-r)}} = \frac{S}{r_a}\,\frac{1}{\sqrt{(r_b-r)(r_c-r)}},$$

et ainsi de toute formule entre les éléments d'un triangle.

SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES;

PAR M. ERNEST CESARO.

1. La position d'un point M sur une ligne est déterminée par l'arc s qui le sépare d'un point fixe de la courbe : la nature de celle-ci, au point considéré, est définie par les rayons de courbure ρ et r. Abstraction faite de sa position dans l'espace, la courbe peut donc être représentée par deux relations (*équations intrin-*

sèques) entre les variables s, ρ, r (*coordonnées intrinsèques*). Il est clair qu'il n'en faut pas davantage pour l'étude des *propriétés intimes* d'une ligne; mais il y a plus : nous allons montrer, en effet, et c'est là le but principal de cet article, que, par le simple emploi des coordonnées intrinsèques, on passe aisément de l'étude des faits inhérents à la courbe à celle des faits *extérieurs*.

2. Au point M prenons comme axes la *tangente*, la *binormale* et la *normale principale*, et supposons que les coordonnées x, y, z d'un point P soient données en fonction de s. On démontre facilement que, lorsqu'on passe de M au point infiniment voisin, ces coordonnées subissent, relativement aux axes primitifs, les variations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x &= dx - \frac{z-\rho}{\rho}\,ds,\\ \delta y &= dy - \frac{z}{r}\,ds,\\ \delta z &= dz + \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right) ds. \end{aligned}\right.$$

De même, si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs d'une droite quelconque, relativement au même trièdre, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\lambda &= d\lambda - \frac{\nu}{\rho}\,ds,\\ \delta\mu &= d\mu - \frac{\nu}{r}\,ds,\\ \delta\nu &= d\nu + \left(\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\mu}{r}\right) ds. \end{aligned}\right.$$

Les formules (1) et (2), quoique très simples et faciles à établir, sont d'une importance extrême; elles constituent, à elles seules, la base d'une nouvelle théorie des lignes et des surfaces.

3. *Point fixe.* — Pour exprimer que le point P est fixe dans l'espace, on doit écrire, en vertu de (1),

$$(3) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{z - \rho}{\rho}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \qquad \frac{dz}{ds} = -\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right).$$

Direction fixe. — De même, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la direction (λ, μ, ν) soit invariable sont

$$(4) \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\nu}{\rho}, \qquad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\nu}{r}, \qquad \frac{d\nu}{ds} = -\left(\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\mu}{r}\right).$$

Droite fixe. — Pour exprimer qu'une droite est fixe, il faut, aux conditions d'invariabilité de sa direction, joindre celles de fixité de l'un de ses points.

Plan fixe. — Le plan perpendiculaire à la direction (λ, μ, ν), situé à la distance p de M, sera fixe si aux conditions (4) on joint la suivante :

$$(5) \qquad \frac{dp}{ds} = -\lambda,$$

que l'on obtient, soit par des considérations géométriques directes, soit en différentiant l'équation du plan et en tenant compte des formules (3) et (4).

4. Maintenant nous pouvons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne appartienne à une surface donnée : cette condition est, en quelque sorte, l'équation intrinsèque différentielle de la surface considérée. Si, par exemple, la surface est une sphère de rayon R, il doit exister un point *fixe* P, dont les coordonnées vérifient constamment l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

En ayant égard aux formules (3), trois dérivations consécutives de cette équation montrent que les coor-

données du centre P sont nécessairement

$$(6)\qquad x = 0, \qquad y = -r\frac{d\rho}{ds}, \qquad z = \rho.$$

Conséquemment, la condition cherchée est

$$(7)\qquad \left(r\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + \rho^2 = R^2.$$

En d'autre termes, θ étant une variable arbitraire, *les lignes sphériques sont caractérisées par les équations*

$$(8)\qquad s = f(\theta), \qquad r = f'(\theta), \qquad \rho = R\cos\theta.$$

Il est évident, d'ailleurs, que θ représente l'angle des normales à la courbe et à la surface.

5. On sait que, pour toute courbe, les valeurs (6) sont les coordonnées des points de l'arête de rebroussement de la *surface polaire*. Il en résulte que, pour les lignes sphériques, la surface polaire est un cône : cela est évident. Mais on peut se poser la question en sens inverse et sous une autre forme en se demandant : *quelles sont les lignes dont le plan normal passe par un point fixe?* L'équation du plan normal est $x = 0$: on obtient, par dérivation, $z = \rho$. Deux autres dérivations donnent successivement

$$y = -r\frac{d\rho}{ds}, \qquad \frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds}\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = 0.$$

Or, si l'on intègre la dernière relation, on obtient l'équation (7), et celle-ci exprime que le point M se trouve à une distance *constante* d'un point fixe. Les lignes sphériques sont donc les seules qui jouissent de la propriété demandée.

6. *Est-il possible de tracer une hélice sur une sphère?*

On doit avoir $r = m\rho$, et, par suite, d'après (8),

$$s = m\mathrm{R}\sin\theta, \qquad r = m\mathrm{R}\cos\theta, \qquad \rho = \mathrm{R}\cos\theta.$$

Les équations intrinsèques de la ligne cherchée sont donc

$$(9) \qquad r = m\rho, \qquad \rho^2 + \frac{m^2}{s^2} = \mathrm{R}^2.$$

La dernière équation nous montre que, dans le développement de la surface des tangentes à l'hélice, cette courbe se transforme en une ligne cycloïdale, à savoir une *épicycloïde* ou une *hypocycloïde* suivant que l'angle constant φ, sous lequel l'hélice rencontre les génératrices du cylindre, est plus grand ou plus petit que 45°. Lorsque $\varphi = 45°$, l'hélice se transforme en une *cycloïde*. Quant à la section droite du cylindre, on sait que son équation s'obtient en remplaçant s et ρ respectivement par $\frac{s}{\sin\varphi}$ et $\frac{\rho}{\sin^2\varphi}$ dans la deuxième égalité (9), ce qui donne

$$\rho^2 + \frac{s^2}{1+m^2} = \left(\frac{m^2\mathrm{R}}{1+m^2}\right)^2.$$

Le cylindre est donc toujours à base *épicycloïdale*. Le diamètre du cercle directeur est $\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,2\varphi$ pour la transformée de l'hélice : il est égal à $2\mathrm{R}\cos\varphi$ pour la section droite du cylindre.

7. L'axe du cylindre est la parallèle menée par le centre de la sphère à la *droite rectifiante;* les parallèles menées par le même centre à la tangente, à la binormale, à la normale principale, font les angles *constants* φ, $90° - \varphi$, $90°$, avec cet axe, et, par suite, elles décrivent deux cônes circulaires et un plan. En d'autres termes, les *indicatrices* sphériques des trois droites principales de l'hélice sont deux petits cercles et un grand cercle.

Dès lors, il est aisé de concevoir une génération simple de la courbe. En effet, le plan normal se meut en enveloppant un cône circulaire (le cône des binormales) et il coupe la sphère suivant un grand cercle, qui contient nécessairement le point M de la courbe. Or, si l'on observe que, d'après les formules (8), la variation $d\theta$ de l'angle, que le rayon passant par M fait avec la normale, ne diffère pas de l'angle de deux binormales consécutives, on voit immédiatement que le point M est *fixe* sur le grand cercle mobile. Conséquemment : *les seules hélices possibles sur une sphère sont les courbes décrites par les points d'un grand cercle, qui se meut en restant tangent à un petit cercle.* Il est évident que l'on peut aussi engendrer la courbe en faisant rouler, sans glissement, un cylindre circulaire, de rayon a, sur un autre cylindre circulaire, de rayon b : les points d'une génératrice fixe du cylindre mobile, qui restent à la distance $2a+b$ d'un point de l'axe, décrivent la courbe demandée.

8. *Passage aux coordonnées extrinsèques.* — Prenons comme axes des X et des Y deux diamètres de la sphère, perpendiculaires entre eux et situés dans le plan de base du cylindre épicycloïdal ; comptons les Z sur l'axe de ce cylindre. Puisque les cosinus directeurs de l'axe des Z sont $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1$, o, il est clair que l'on a

$$Z = x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1,$$

où l'on doit remplacer x et y par les coordonnées du centre. Par conséquent,

$$Z = R\sin\theta\sin\varphi_1. \tag{10}$$

Cherchons, maintenant, la distance p de M à un plan *fixe*, passant par l'axe du cylindre ; elle est donnée par l'expression $\lambda x - \mu_1 y + \nu z$, où x, y, z sont les coor-

données du centre, de sorte que

$$(11) \qquad p = R(\mu \sin\theta + \nu \cos\theta).$$

En outre, la direction (λ, μ, ν) doit être perpendiculaire à l'axe du cylindre, et, par suite, on peut poser

$$\lambda = -\sin\mathfrak{J}\sin\varphi, \qquad \mu = \sin\mathfrak{J}\cos\varphi, \qquad \nu = \cos\mathfrak{J},$$

où l'on détermine $\mathfrak{J}$ facilement par la troisième condition (4). On trouve

$$\mathfrak{J} = \frac{\theta}{\cos\varphi} + \text{const.}$$

Chaque valeur de la constante correspond à un plan particulier : si l'on veut considérer deux plans perpendiculaires, il est aisé de voir qu'il faut prendre deux constantes différant de $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi les équations

$$X = R\left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{\cos\varphi} + \cos\varphi\sin\theta\sin\frac{\theta}{\cos\varphi}\right),$$

$$Y = R\left(-\cos\theta\sin\frac{\theta}{\cos\varphi} + \cos\varphi\sin\theta\cos\frac{\theta}{\cos\varphi}\right).$$

En y joignant l'équation (10), on trouve, par élimination de θ, les équations ordinaires de la courbe.

9. On est amené à la considération des mêmes courbes lorsqu'on étudie les *développantes sphériques* des lignes sphériques, c'est-à-dire les courbes décrites par les points d'un grand cercle, qui se meut en restant tangent à une courbe quelconque, donnée sur la sphère. Soit (M) cette courbe : relativement au trièdre principal de (M), les coordonnées des points M_0 de la développante sont

$$x = -R\sin\frac{s}{R},$$

$$y = R\left(1 - \cos\frac{s}{R}\right)\sin\theta,$$

$$z = R\left(1 - \cos\frac{s}{R}\right)\cos\theta.$$

Les formules (1) donnent

$$\frac{\partial x}{ds} = 0, \qquad \frac{\partial y}{ds} = \sin\frac{s}{R}\sin\theta, \qquad \frac{\partial z}{ds} = -\sin\frac{s}{R}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

Par suite, le rapport des vitesses de M_0 et M et les cosinus directeurs de la tangente à (M_0) sont

$$(12)\quad \frac{ds_0}{ds} = \sin\frac{s}{R}\tang\theta, \qquad a = 0, \qquad b = -\cos\theta, \qquad c = \sin\theta.$$

Ainsi, la tangente à (M_0) est perpendiculaire au grand cercle MM_0. En d'autres termes, (M_0) est une trajectoire orthogonale des grands cercles tangents à (M). D'après les formules (12),

$$\frac{\partial a}{ds} = -\frac{\sin\theta}{\rho}, \qquad \frac{\partial b}{ds} = 0, \qquad \frac{\partial c}{ds} = 0.$$

Il en résulte que la normale à (M_0) est parallèle à la tangente à (M), et, par suite, la binormale est parallèle au rayon passant par M, de sorte que (M) est l'*indicatrice des binormales* de (M_0). En outre,

$$(13)\qquad \rho_0 = -R\sin\frac{s}{R}.$$

Enfin, puisque l'angle de deux normales consécutives de (M_0) est égal à l'angle de contingence de (M), on a, en vertu du théorème de Lancret,

$$\left(\frac{ds_0}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{ds_0}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{ds}{\rho}\right)^2,$$

d'où

$$(14)\qquad r_0 = R\sin\frac{s}{R}\tang\theta.$$

Les formules (12), (13), (14) permettent de chercher (M_0), connaissant (M). Du reste, ces formules peuvent être résumées en une seule

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{R}.$$

D'après (13) et (14), on voit que $\tang\theta$ représente, en valeur absolue, le *rapport des courbures* de (M_0). Par conséquent, pour que (M_0) soit une hélice, il faut et il suffit que θ soit constant, c'est-à-dire que (M) soit un cercle. Donc : *les hélices sphériques sont les développantes des cercles de la sphère.*

10. Nous avons dit que $\tang\theta$ représente le rapport des courbures de la ligne (M_0). On en déduit immédiatement que la droite rectifiante de (M_0) est parallèle à la binormale de (M). L'arète de rebroussement (M_1) de la surface rectifiante de (M_0) a donc sa tangente et sa binormale respectivement parallèles à la binormale et à la tangente de (M), aux points correspondants, d'où il résulte que le rapport des courbures de (M_1) est inverse du rapport analogue de (M); par conséquent, si (M_1) est une hélice, (M) aussi est une hélice, et réciproquement. Cela étant, si l'on veut que (M_0) soit une géodésique d'hélicoïde développable, il faut et il suffit que (M_1) soit une hélice, et, par suite, qu'il en soit de même de (M). Il faut, en d'autres termes, que (M_0) soit une développante sphérique d'hélice sphérique, comme l'a fait remarquer M. Pirondini [1]. Donc : *les seules lignes sphériques, possibles comme géodésiques sur des hélicoïdes développables, sont les deuxièmes développantes sphériques des cercles de la sphère.*

11. *Loxodromies.* — Soit (λ, μ, ν) la direction des perpendiculaires au plan de l'équateur. La tangente au méridien passant par M est perpendiculaire au rayon, et, d'autre part, elle doit faire l'angle *constant* ψ avec la tangente à la courbe : il en résulte que ses cosinus

---

(1) *Journal de Battaglini*, p. 229; 1885.

directeurs sont

$$\cos\psi, \quad \sin\psi\cos\theta, \quad -\sin\psi\sin\theta.$$

D'ailleurs, cette tangente doit rencontrer le diamètre, dont la direction est (λ, μ, ν). Cela exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \lambda & \cos\psi & 0 \\ \mu & \sin\psi\cos\theta & \sin\theta \\ \nu & -\sin\psi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda \operatorname{tang}\psi = \mu\cos\theta - \nu\sin\theta.$$

On trouve, par dérivation,

$$\nu \operatorname{tang}\psi = \lambda\sin\theta,$$

et, par suite,

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\sin\psi\cos\psi\cos\theta} = \dfrac{\mu}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta} \\ \qquad = \dfrac{\nu}{\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}}. \end{cases}$$

Une nouvelle dérivation donne facilement, au signe près,

$$s = \frac{R}{\cos\psi}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\theta}{\sin\psi}\right);$$

puis

$$r = \frac{R\operatorname{tang}\psi}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}, \qquad \rho = R\cos\theta.$$

Il faudrait éliminer θ entre ces trois relations pour avoir les équations intrinsèques de la loxodromie.

12. Les formules (15) sont susceptibles d'autres applications. Ainsi, en les utilisant dans (11), on trouve d'abord que la distance de M au plan de l'équateur est

$$p = \frac{R\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}}.$$

D'autre part, si $\mathcal{L}$ est la latitude du point M, la même

distance est égale à $\mathrm{R}\sin\mathcal{L}$. Il en résulte

$$\operatorname{tang}\mathcal{L} = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sin\psi}.$$

Dès lors, les équations intrinsèques de la loxodromie peuvent être mises sous cette autre forme

$$s = \frac{\mathrm{R}\mathcal{L}}{\cos\psi},$$

$$\rho = \frac{\mathrm{R}\cos\mathcal{L}}{\sqrt{1-\cos^2\psi\sin^2\mathcal{L}}},$$

$$r = \frac{\mathrm{R}(1-\cos^2\psi\sin^2\mathcal{L})}{\sin\psi\cos\psi}.$$

La première de ces équations est évidente. Remarquons encore que les coordonnées polaires de la projection de M sur le plan de l'équateur sont données par les égalités

$$u = \mathrm{R}\cos\mathcal{L}, \qquad \frac{u\,d\omega}{ds} = \sin\psi.$$

On en déduit aisément

$$u = \frac{2\mathrm{R}}{e^{\omega\cot\psi} + e^{-\omega\cot\psi}}.$$

Telle est l'équation de la projection équatoriale de la loxodromie.

13. Les exemples traités suffisent pour montrer toute l'efficacité de cette méthode, qui est susceptible, d'ailleurs, des applications les plus variées. En nous bornant à celles qui concernent la recherche des équations intrinsèques différentielles des surfaces, nous allons indiquer succinctement comment on pourrait traiter quelques autres cas particuliers. En général, après avoir mis le problème en équation, moyennant une propriété caractéristique de la surface, on différentie l'équation obtenue, autant de fois qu'il le faut pour en éli-

miner les variables auxiliaires introduites, et l'on arrive ainsi au résultat voulu. Par exemple, pour le *cône de révolution*, il doit exister un point *fixe* P (coordonnées x, y, z), et une direction *invariable* (cosinus λ, μ, ν), telles que la droite MP fasse un angle constant θ avec cette direction. L'équation du problème est donc

$$\lambda x + \mu y + \nu z = u \cos\theta, \qquad \text{où} \qquad u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Trois dérivations consécutives donnent

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{\mu}{y + \rho \dfrac{z}{y} \dfrac{y^2 + z^2}{u^2}} = \frac{\nu}{z - \rho \dfrac{y^2 + z^2}{u^2}} = \frac{\cos\theta}{u}.$$

On en déduit

$$\rho = \left(1 + \frac{x^2}{y^2 + z^2}\right)^{\frac{3}{2}} y \tang\theta.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure d'une ligne quelconque, tracée sur un cône de révolution, en fonction des distances du sommet au plan *normal*, au plan *osculateur* et au plan *rectifiant*. Trois nouvelles dérivations permettent d'éliminer ces distances et de trouver l'équation différentielle demandée ; il suffira d'y supposer r infini, pour avoir l'équation différentielle des *coniques*.

14. De même, pour le *cylindre de révolution*, on exprimera que la distance de M à une droite fixe est une constante R. On a d'abord

$$x^2 + y^2 + z^2 - p^2 = \mathrm{R}^2 \qquad \text{ou} \qquad p = \lambda x + \mu y + \nu z;$$

puis, par dérivation,

$$\begin{aligned} x &= \lambda p, \\ y &= \mu p + 3\lambda\nu r - (1 - \lambda^2) r \frac{d\rho}{ds}, \\ z &= \nu p + (1 - \lambda^2)\rho. \end{aligned}$$

Ces relations, multipliées respectivement par λ, μ, ν et additionnées, donnent

$$(1-\lambda^2)\left(\mu r \frac{d\rho}{ds} + \nu\rho\right) = 3\lambda\mu\nu r.$$

Deux autres dérivations suffisent pour éliminer λ, μ, ν. On arrive autrement à ce résultat, en exprimant que la projection de la courbe sur un plan *fixe* est un cercle : c'est même celle-ci la voie à suivre lorsqu'il s'agit d'un cylindre quelconque. Les coordonnées de la projection M_0 de M, sur un plan fixe, sont

$$x = \lambda p, \qquad y = \mu p, \qquad z = \nu p.$$

D'après les formules fondamentales, on a

$$\frac{\partial x}{ds} = 1 - \lambda^2, \qquad \frac{\partial y}{ds} = -\lambda\mu, \qquad \frac{\partial z}{ds} = -\lambda\nu;$$

par conséquent, l'élément de la ligne (M_0) et les cosinus directeurs de la tangente à cette ligne sont donnés par les égalités

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{ds_0}{ds} &= \sqrt{1-\lambda^2};\\ a &= \sqrt{1-\lambda^2};\\ b &= -\frac{\lambda\mu}{\sqrt{1-\lambda^2}},\\ c &= -\frac{\lambda\nu}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \end{aligned}\right.$$

Cela étant, on a aussi

$$\frac{\partial a}{ds} = 0, \qquad \frac{\partial b}{ds} = -\frac{\mu\nu}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\partial c}{ds} = \frac{\mu^2}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\rho}.$$

En élevant au carré et en additionnant, on obtient

$$(17)\qquad \rho_0 = \frac{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu}\rho.$$

Si

$$F(\rho_0, s_0) = 0$$

est l'équation de la section droite, en la différentiant et en y remplaçant les valeurs (16) et (17), on trouve une relation contenant les variables auxiliaires λ, μ, ν, que l'on éliminera au moyen de deux nouvelles différentiations. Dans le cas particulier du cylindre de révolution, il suffit de différentier (17), en y supposant ρ_0 *constant*.

15. Comme dernier exemple, considérons un *hélicoïde gauche* à plan directeur. Un point M de cette surface étant projeté en N, sur l'axe directeur, on doit prendre sur NM une longueur NP *constante* et exprimer que le lieu décrit par le point P est à flexion et torsion constantes. Nous suivrons une autre voie : ω étant l'angle de MN avec un plan fixe, passant par l'axe, et p la distance de N à un point Q, fixe sur l'axe, nous exprimerons que la longueur p varie proportionnellement à ω, de sorte que

$$dp = a\,d\omega. \tag{18}$$

Or, si x, y, z sont les coordonnées du point *fixe* Q, et λ, μ, ν les cosinus directeurs de l'axe, nous pouvons, aux trois premières variables, substituer les coordonnées de N, à savoir

$$\xi = x - \lambda p, \qquad \eta = y - \mu p, \qquad \zeta = z - \nu p,$$

en observant que, d'après les formules (3), (4), (5), on a

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\zeta}{\rho} - (1 - \lambda^2),$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{\zeta}{r} + \lambda\mu,$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\eta}{r}\right) + \lambda\nu.$$

Cela étant, considérons les cosinus directeurs de MN :

$$\frac{\alpha}{\xi} = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\gamma}{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

On a, d'après (2),

$$\frac{\partial \alpha}{ds} = \frac{\alpha^2 + \lambda^2 - 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

$$\frac{\partial \beta}{ds} = \frac{\alpha\beta + \lambda\mu}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

$$\frac{\partial \gamma}{ds} = \frac{\alpha\gamma + \lambda\nu}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

En élevant au carré et en additionnant, on obtient

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\nu\eta - \mu\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

au signe près; par conséquent, si l'on tient compte de (5), l'égalité (18) devient

$$\lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = a(\nu\eta - \mu\zeta).$$

Deux dérivations consécutives donnent

$$\lambda^2 \rho \xi = \frac{a}{2}\eta,$$

$$\left(\lambda \frac{d\rho}{ds} + 2\nu\right)\xi + \left(\lambda - \frac{a}{2\lambda r}\right)\zeta = \lambda(\mu^2 + \nu^2) + \mu\frac{a}{2}.$$

En y joignant la relation

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0,$$

nous pouvons déjà éliminer ξ, η, ζ, ce qui nous conduit à l'égalité

$$2\lambda\nu r \frac{d\rho}{ds} + 2\lambda\mu\rho - 3(\nu^2 - \lambda^2)r + a$$
$$= \frac{4\lambda^3 r\rho}{a^2}[\lambda(\mu^2 - \nu^2)\rho - 2\mu a].$$

Au moyen de deux autres dérivations, on se débarrasse

de λ, μ, ν. Nous laissons au lecteur le soin d'achever les calculs, qui ne présentent, d'ailleurs, aucune difficulté. Bien prochainement, peut-être, nous reviendrons sur cette féconde méthode de recherches, pour en faire des applications à la théorie des *développoïdes* et des *podaires* sphériques, ainsi qu'à la théorie générale des surfaces.

SUR LA REPRÉSENTATION DES FIGURES TRACÉES SUR UNE SURFACE. APPLICATIONS AUX CARTES DE GÉOGRAPHIE;

PAR M. M. DU CHATENET.

Étant donnée une figure tracée sur une surface, on peut, d'une infinité de manières différentes, obtenir une figure qui sera sa représentation ou sa transformée située sur une autre surface. Il suffira pour cela de se donner deux relations entre les coordonnées d'un point sur chacune des deux surfaces.

Soient p et q les coordonnées quelconques d'une courbe située sur une surface donnée, u et v les coordonnées de sa transformée sur une autre surface. Tout système de deux relations

$$F(p, q, u, v) = 0,$$
$$F_1(p, q, u, v) = 0$$

déterminera un mode de transformation.

On peut donc se proposer de définir les fonctions caractéristiques F et F_1, de telle sorte que le système de transformation qui en résultera jouisse de telle propriété qu'on voudra lui imposer.

Notons que tous les problèmes que l'on peut se pro-

poser sur la construction des cartes de géographie ne sont que des cas particuliers de la question que nous venons d'énoncer, puisque les surfaces considérées seront, d'une part, la sphère terrestre et, de l'autre, un plan, celui de la carte.

Nous examinerons et chercherons à définir un mode de transformation par la condition suivante. Soit une famille de courbes tracées sur une surface et représentées par l'équation

$$\mu\varphi + \nu\psi = 1, \tag{1}$$

dans laquelle μ et ν sont des constantes, φ et ψ des fonctions quelconques de u et v. Nous voulons que les lignes définies par l'équation (1) aient sur la seconde surface une transformée définie par l'équation

$$mu + nv = 1, \tag{2}$$

dans laquelle m et n sont des constantes.

En d'autres termes, nous déterminerons une transformation telle que toute famille de courbes de la première surface définie par une équation linéaire entre deux fonctions de ses coordonnées soit représentée sur la deuxième surface par une équation linéaire entre les coordonnées.

Pour résoudre ce problème, il suffira de fixer la forme des fonctions φ et ψ.

Formons l'équation différentielle de cette famille de courbes, nous différentierons deux fois (1) en considérant v comme variable indépendante et éliminerons μ et ν entre les deux équations obtenues et l'équation (1). Nous arriverons ainsi à l'équation

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d\varphi}{dv}+\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dv}\right)\left[\frac{d^2\psi}{dv^2}+2\frac{d^2\psi}{du\,dv}\frac{du}{dv}+\frac{d^2\psi}{du^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\frac{d\psi}{du}\frac{d^2u}{dv^2}\right]\\&\quad=\left(\frac{d\psi}{dv}+\frac{d\psi}{du}\frac{du}{dv}\right)\left[\frac{d^2\varphi}{dv^2}+2\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\frac{du}{dv}+\frac{d^2\psi}{du^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\frac{d\varphi}{du}\frac{d^2u}{dv^2}\right],\end{aligned}\right. \tag{3}$$

qui n'est autre chose que l'équation différentielle des lignes (1) transformées.

Or, puisque cette transformée doit être représentée par une équation linéaire entre u et v, la relation (3) ne doit pas différer de $\frac{d^2 u}{dv^2} = 0$.

Les coefficients de $\left(\frac{du}{dv}\right)^3$, $\left(\frac{du}{dv}\right)^2$, $\left(\frac{du}{dv}\right)^1$, $\left(\frac{du}{dv}\right)^0$ devront donc être nuls, ce qui fournit les quatre relations suivantes :

$$\frac{d\varphi}{du}\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{d\psi}{du}\frac{d^2\varphi}{du^2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d\varphi}{dv}\frac{d^2\psi}{dv^2} - \frac{d\psi}{dv}\frac{d^2\varphi}{dv^2} = 0, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &2\frac{d\varphi}{du}\frac{d^2\psi}{du\,dv} - 2\frac{d\psi}{du}\frac{d^2\varphi}{du\,dv} \\ &\qquad + \frac{d\varphi}{dv}\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{d\psi}{dv}\frac{d^2\varphi}{du^2} = 0, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} &2\frac{d\varphi}{dv}\frac{d^2\psi}{du\,dv} - 2\frac{d\psi}{dv}\frac{d^2\varphi}{du\,dv} \\ &\qquad + \frac{d\varphi}{du}\frac{d^2\psi}{dv^2} - \frac{d\psi}{du}\frac{d^2\varphi}{dv^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

L'équation (4) ne contenant que des dérivées par rapport à u, donne immédiatement pour solution

$$\psi = \varphi f(v) + F(v), \tag{8}$$

f et F étant des fonctions quelconques de v, mais indépendantes de u.

De (8) nous déduisons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\psi}{du} = f\frac{d\varphi}{du}, \\ &\frac{d^2\psi}{du^2} = f\frac{d^2\varphi}{du^2}, \\ &\frac{d\psi}{dv} = f\frac{d\varphi}{dv} + \varphi\frac{df}{dv} + \frac{dF}{dv}, \\ &\frac{d^2\psi}{dv^2} = f\frac{d^2\varphi}{dv^2} + \varphi\frac{d^2 f}{dv^2} + 2\frac{d\varphi}{dv}\frac{df}{dv} + \frac{d^2F}{dv^2}, \\ &\frac{d^2\psi}{du\,dv} = f\frac{d^2\varphi}{du\,dv} + \frac{d\varphi}{du}\frac{df}{dv}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

En portant ces valeurs dans (5), (6), (7) de manière à éliminer ψ, nous obtiendrons

$$(10)\quad \frac{d\varphi}{dv}\left(\varphi\frac{d^2f}{dv^2}+2\frac{d\varphi}{dv}\frac{df}{dv}+\frac{d^2F}{dv^2}\right)-\frac{d^2\varphi}{dv^2}\left(\varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}\right)=0,$$

$$(11)\quad 2\frac{df}{dv}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2-\frac{d^2\varphi}{du^2}\left(\varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}\right)=0,$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{du}\left(\varphi\frac{d^2f}{dv^2}+4\frac{d\varphi}{dv}\frac{df}{dv}+\frac{d^2F}{dv^2}\right)\\&\qquad-2\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left(\varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Dans (11), les dérivées de φ ne sont prises que par rapport à u; on peut facilement intégrer cette équation, ce qui donne

$$(13)\quad \varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}=\frac{M}{u+N},$$

où M et N sont des fonctions quelconques de v, mais indépendantes de u.

De (13) on peut déduire par dérivation les valeurs de $\frac{d\varphi}{dv}$, $\frac{d^2\varphi}{du\,dv}$, $\frac{d\varphi}{du}$. En portant ces valeurs dans (12), on aura

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}&3\left(\frac{dF}{dv}\frac{d^2f}{dv^2}-\frac{df}{dv}\frac{d^2F}{dv^2}\right)(u+N)\\&\qquad+2\frac{df}{dv}\frac{dM}{dv}-M\frac{d^2f}{dv^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Puisque les fonctions F, f, M, N ne contiennent pas u, il faut, pour que la relation (14) puisse être vérifiée, avoir séparément

$$(15)\quad \frac{dF}{dv}\frac{d^2f}{dv^2}-\frac{df}{dv}\frac{d^2F}{dv^2}=0,$$

$$(16)\quad 2\frac{df}{dv}\frac{dM}{dv}-M\frac{d^2f}{dv^2}=0.$$

Ces deux équations s'intègrent facilement. L'équation (15) montre que les fonctions f et F sont liées entre

elles par une relation linéaire. L'équation (16) a pour solution

$$(17)\qquad \frac{df}{dv} = \mathrm{KM}^2,$$

K étant une constante quelconque.

Posons cette valeur de $\frac{df}{dv}$ dans l'expression de $\frac{d\varphi}{dv}$ fournie par (13) : elle deviendra

$$(18)\qquad \frac{d\varphi}{dv} = -\frac{\mathrm{M}\dfrac{d\mathrm{N}}{dv} - (u+\mathrm{N})\dfrac{d\mathrm{M}}{dv}}{\mathrm{KM}^2(u+\mathrm{N})^2};$$

d'où l'on tire par dérivation

$$(19)\qquad \frac{d^2\varphi}{dv^2} = \frac{\left\{\begin{array}{l} 2\left[\mathrm{M}\dfrac{d\mathrm{N}}{dv} - (u+\mathrm{N})\dfrac{d\mathrm{M}}{dv}\right]^2 \\ \quad - \mathrm{M}(u+\mathrm{N})\left[\mathrm{M}\dfrac{d^2\mathrm{N}}{dv^2} - (u+\mathrm{N})\dfrac{d^2\mathrm{M}}{dv^2} + 2\dfrac{d\mathrm{M}}{dv}\dfrac{d\mathrm{N}}{dv}\right]\end{array}\right\}}{\mathrm{KM}^3(u+\mathrm{N})^3}.$$

Portons enfin ces valeurs (18) et (19) dans (20), dont nous n'avons pas encore fait usage. Elle donnera, après cette substitution,

$$(20)\qquad \left[2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - \mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}\right](u+\mathrm{N}) - \mathrm{M}^2\frac{d^2\mathrm{N}}{dv^2} = 0.$$

Puisque M et N sont des fonctions indépendantes de u, on devra avoir, pour que cette relation puisse être vérifiée,

$$(21)\qquad 2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - \mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2} = 0,$$

$$(22)\qquad \frac{d^2\mathrm{N}}{dv^2} = 0.$$

On voit, d'après (22), que N doit être une fonction linéaire de v, et l'intégration de (9) donne

$$(23)\qquad \mathrm{M} = \frac{1}{hv - g},$$

h et g étant des constantes.

En substituant cette valeur de M dans (17), nous aurons par l'intégration

$$f = \frac{n}{hv + g} + r$$

et, comme F est fonction linéaire de f,

$$\mathrm{F} = \frac{s}{hv + g} + t.$$

Nous avons ainsi calculé tous les éléments de la valeur de φ et ψ. Il suffirait du reste de connaître une de ces fonctions pour en déduire l'autre, en vertu de la symétrie des équations.

Les fonctions φ et ψ qu'il s'agissait de déterminer auront donc les formes suivantes :

(24) $$\varphi = \frac{au + bv + p}{mu + nv + q},$$

(25) $$\psi = \frac{a'u + b'v + p'}{mu + nv + q}.$$

En substituant ces valeurs dans (1), nous voyons que la famille de courbes considérées aura pour correspondante sur l'autre surface celle définie par l'équation

$$\mu(au + bv + p) + \nu(a'u + b'v + p') = mu + nv + q.$$

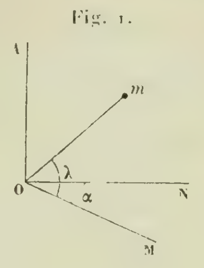
Nous examinerons quelques conséquences de l'analyse précédente en choisissant la nature des fonctions φ et ψ, celle des coordonnées u et v, et celle des deux surfaces considérées.

I.

Sans rien supposer sur la nature de la surface contenant les courbes que l'on veut transformer, nous définirons la position d'un point sur cette surface au moyen d'un axe quelconque OA et d'un plan OMN perpendiculaire à OA. Nous appellerons *longitude* et désignerons

par α l'angle du plan passant par l'axe OA et le point m considéré avec un plan origine AON; nous appellerons

Fig. 1.



latitude et désignerons par λ l'angle du rayon vecteur Om avec le plan OMN.

Examinons la famille de courbes définie par l'équation suivante

$$(26) \qquad \cot\lambda(A\cos\alpha + B\sin\alpha) = 1,$$

et étudions la transformation d'après laquelle les courbes (26) sont représentées sur un plan par des droites.

Remarquons dès maintenant que, dans le cas particulier où la surface considérée est la sphère terrestre, si nous prenons pour axe OA la ligne des pôles et pour plan OMN celui de l'équateur, α et λ ne seront autre chose que la longitude et la latitude géographiques d'un point, et l'équation (26) sera l'équation générale des grands cercles de la sphère. Dans ce cas, la question que nous nous sommes proposée pourra donc se formuler de la manière suivante : Trouver tous les systèmes de cartes de géographie dans lesquels les grands cercles de la sphère sont représentés par des droites.

Il suffira, pour avoir la solution du problème général, de faire dans les formules (24) et (25)

$$\varphi = \cos\alpha\cot\lambda, \qquad \psi = \sin\alpha\cot\lambda, \qquad u = x, \qquad v = y.$$

et nous aurons ainsi

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha\cot\lambda &= \frac{ax+by+p}{mx+ny+q},\\ \sin\alpha\cot\lambda &= \frac{a'x+b'y+p'}{mx+ny+q}. \end{aligned}\right.$$

On déduit facilement de ces formules les équations des transformées des courbes de longitude et de latitude

$$(28)\qquad \tang\alpha = \frac{a'x+b'y+p'}{ax+by+p},$$

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &(mx+ny+q)^2\cot^2\lambda\\ &\quad =(ax+by+p)^2+(a'x+b'y+p')^2. \end{aligned}\right.$$

Prenons dans le plan pour origine des coordonnées le point représentant l'une des intersections de l'axe OA avec la surface (l'un des pôles terrestres dans le cas de la sphère). Il est évident que la courbe de longitude devra être représentée sur le plan par une droite issue de l'origine; par conséquent, d'après (28), nous devons avoir $p=0$, $p'=0$, et les équations (28) et (29) deviendront

$$(30)\qquad \tang\alpha\ \frac{a'x+b'y}{ax+by},$$

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &(mx+ny+q)\cot^2\lambda\\ &\quad =(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit que les courbes de latitude ont toujours des coniques pour transformées.

Le canevas de cette transformation sera donc formé par un système de droites concourantes et de courbes du second degré.

La condition qui détermine la nature des coniques est la suivante :

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &[(an-mb)^2+(a'n-mb')^2]\cot^2\lambda\\ &\qquad\qquad -(ab'-ba')^2 \left\{\begin{array}{ll} >0 & \text{hyperbole,}\\ = & \text{parabole,}\\ <0 & \text{ellipse.}\end{array}\right. \end{aligned}\right.$$

Les diverses courbes de latitude seront généralement représentées par les trois coniques suivant la valeur de λ. On peut démontrer que toutes ces coniques ont leur centre sur une même droite dont l'équation est

$$(33)\qquad (an - bm)(ax + by) + (a'n - b'm)(a'x + b'y) = 0.$$

La condition (32) montre que, lorsqu'on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, les courbes de latitude sont toujours figurées par des hyperboles; ce réseau ne sera jamais formé uniquement d'hyperboles équilatères.

La même condition (32) montre encore que, dans le cas où $m = n = 0$, on aura uniquement des ellipses homothétiques et concentriques.

On voit aussi que, lorsque $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{m}{n}$, on a uniquement des paraboles ayant le même axe.

L'équation générale (31) montre que les termes du deuxième degré ne peuvent disparaître pour toute valeur de λ; les courbes de latitude ne pourront donc jamais être figurées par un réseau de droites.

Cherchons donc, ce qui serait d'un grand avantage pour le tracé d'un canevas géographique, si elles peuvent être toutes représentées par des cercles, c'est-à-dire par la courbe la plus simple après la droite.

Pour que l'équation (31) donne un cercle pour toute valeur de λ, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$m = n = 0, \qquad ab + a'b' = 0, \qquad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2,$$

et alors l'équation se réduit à

$$(34)\qquad (a^2 + a'^2)(x^2 + y^2) = q^2 \cot^2 \lambda.$$

Ainsi, quand les courbes de latitude sont toutes représentées par des cercles, ces cercles ont pour centre com-

mun le point correspondant à l'une des intersections de la surface avec l'axe choisi et un rayon proportionnel à la cotangente de la latitude.

Des conditions nécessaires pour obtenir des cercles, on déduit $b = \pm a'$, $b' = \mp a$; en portant ces valeurs dans (30), on aura l'équation des droites de longitude

(35) $$\tang \alpha = \frac{a'x \mp ay}{ax \mp a'y}.$$

Si nous posons $\frac{a'}{a} = \tang \theta$ et $\frac{y}{x} = \tang v$, nous aurons

$$v = \theta \pm \alpha.$$

Les lignes de longitude feront donc entre elles sur le plan les mêmes angles que sur la surface.

On peut donc dans le cas des cartes de géographie, en tenant compte de la forme des relations (34) et (35), énoncer la proposition suivante :

La projection centrale, c'est-à-dire la perspective obtenue du centre de la sphère en projetant sur un plan perpendiculaire à la ligne des pôles, est le seul système de cartes dans lequel les grands cercles sont représentés par des droites et les parallèles par des cercles.

Il est un cas qui a échappé à l'analyse précédente, puisque nous avons pris pour origine le point de concours des droites de longitude : c'est celui où ces droites seraient parallèles. Nous pourrons alors prendre pour axes des x une perpendiculaire à leur direction commune. D'après (28), nous devrons avoir $b' = 0$, $b = 0$, et, en plaçant convenablement l'origine, nous pourrons, sans nuire à la généralité, supposer que $q = 0$, $p' = 0$.

Les équations des lignes formant le canevas deviennent

$$(36) \qquad \tan\alpha = \frac{a'x}{ax+p},$$

$$(37) \qquad (mx+ny)^2\cot^2\lambda = (ax+p)^2 + a'^2x^2.$$

Les transformées des lignes de latitude seront toujours des hyperboles.

Comme cas particulier des équations (36) et (37), on trouve, quand il s'agit de la sphère, le cas de la projection centrale sur un plan perpendiculaire à l'équateur. On voit donc que, dans tout système de cartes où les grands cercles sont figurés par des droites et les méridiens par des droites parallèles, les cercles de latitude le seront par des hyperboles.

II.

Employant les mêmes coordonnées α et λ que précédemment, considérons la famille de courbes tracées sur une même surface et données par l'équation

$$(38) \qquad \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\,l\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right) = 1.$$

Cherchons un mode de transformation tel que ces courbes soient représentées sur un plan par des droites.

Dans le cas où la surface donnée sera la sphère terrestre, l'équation (38) sera celle des loxodromies, c'est-à-dire des courbes coupant tous les méridiens sous un angle constant, et alors le problème pourra s'énoncer comme il suit :

Trouver tous les système de cartes dans lesquels les loxodromies sont figurées par des droites.

Il suffira pour résoudre la question de faire, dans les

formules (24) et (25),

$$\varphi = \alpha, \qquad \psi = l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right), \qquad u = x, \qquad v = y,$$

et nous obtiendrons ainsi

$$(39) \qquad \alpha = \frac{ax + by + p}{mx + ny + q},$$

$$(40) \qquad l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{a'x + b'y + p'}{mx + ny + q}.$$

Ces deux équations donnent les transformées des courbes de longitude et de latitude. Or sur la surface les courbes de latitude ne se coupent jamais, puisqu'elles se trouvent sur différents cônes de révolution ayant le même axe et le même sommet. Les transformées de ces lignes qui sont des droites, d'après (40), devront être parallèles. Nous prendrons sur le plan l'axe des x parallèle à cette direction commune. On aura donc $a' = 0$, $m = 0$.

L'équation (39) donne les droites de longitude. Or sur la surface les lignes de longitude passent toutes par l'intersection de l'axe OA avec la surface. Les droites qui sont leurs transformées sur le plan devront donc toutes avoir un point commun. Nous prendrons ce point pour origine, et alors on doit avoir $p = 0$, $q = 0$.

Les équations des deux systèmes de courbes formant le canevas seront donc

$$(41) \qquad \alpha = \frac{ax + by}{ny}, \qquad l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{b'y + p'}{ny}.$$

Si l'on veut imposer cette condition que les droites de longitude soient parallèles entre elles, il faudra que $n = 0$, et, en disposant de la position de l'origine pour faire $p = 0$ et $p' = 0$, les équations du canevas seront

$$(42) \qquad \alpha = \frac{ax + by}{q}, \qquad l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{b'y}{q}.$$

Lorsque $b = 0$, les deux systèmes de droites sont rectangulaires, ce qui correspond à la carte marine ou projection de Mercator.

III.

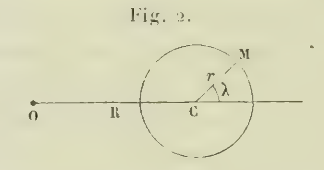
Nous pouvons appliquer la même méthode pour la résolution du problème suivant :

Étant donné un tore circulaire, trouver tous les modes de transformation permettant de représenter sur un plan les figures tracées sur cette surface, avec la condition que les sections centrales du tore soient transformées suivant des droites.

C'est le problème que pourraient se poser les habitants de Saturne pour construire la carte de leur pays.

Prenons pour coordonnées trois axes rectangulaires, l'origine étant placée au centre du tore et le plan des XY

Fig. 2.



coïncidant avec celui de l'équateur. Soient α la longitude d'un point M du tore, telle que nous l'avons entendue, et λ sa latitude, en appelant latitude l'angle du rayon vecteur MC allant au centre du cercle générateur et de la droite OC joignant le point C au centre du tore. On voit facilement que l'on aura

$$X = (R + r\cos\lambda)\cos\alpha,$$
$$Y = (R + r\cos\lambda)\sin\alpha,$$
$$Z = \sin\lambda.$$

L'équation générale des sections centrales du tore

pourra donc s'écrire, au moyen de la longitude et latitude,

$$(43)\qquad \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{R} - r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\cos\alpha + \mathrm{B}\,\frac{\mathrm{R} - r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\sin\alpha = 1.$$

Elle est donc du même type que (1), et nous n'avons, pour résoudre la question, qu'à appliquer les formules (24) et (25), ce qui donnera

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{R} - r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\cos\alpha &= \frac{ax + by + p}{mx + ny + q},\\ \frac{\mathrm{R} - r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\sin\alpha &= \frac{a'x + b'y + p'}{mx + ny + q}. \end{aligned}\right.$$

Les transformées des lignes de longitude et de latitude formant le canevas auront pour équations

$$(45)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{a'x + b'y + p'}{ax + by + p},$$

$$(46)\qquad \left(\frac{\mathrm{R} - r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\right)^2 = \frac{(ax + by + p)^2 + (a'x + b'y + p')^2}{(mx + ny + q)^2}.$$

Ces relations sont tout à fait analogues à celles que nous avons obtenues (28) et (29), en traitant un problème précédent. Elles n'en diffèrent que par le changement de $\cot\lambda$ en $\frac{\mathrm{R} - r\cos\lambda}{r\sin\lambda}$. L'étude que nous en avons déjà faite s'applique donc au cas actuel.

SUR LE SYSTÈME D'UNE CONIQUE ET D'UN CERCLE;

Par M. R. GODEFROY,
Élève de l'École Polytechnique.

Je me propose de démontrer un théorème de Géométrie sur le système d'une conique et d'un cercle donnant immédiatement comme conséquences particulières les

formules fondamentales de la théorie du cercle osculateur dans les coniques.

Considérons une conique à centre : soit l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Les cordes communes à cette ellipse et au cercle $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$ ont pour équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2] = 0,$$

où λ prend successivement l'une des valeurs tirées de l'équation

$$\lambda^3R^2 - \lambda^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2 - a^2R^2 - b^2R^2) \\ - \lambda a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - R^2) + a^4b^4 = 0,$$

exprimant que la conique passant aux intersections de l'ellipse et du cercle est un système de droites. Les distances de leurs points d'intersection au grand axe de l'ellipse sont données par

$$y = \frac{\beta\lambda}{a^2+\lambda}.$$

Soient y_1, y_2, y_3 les trois distances, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les paramètres correspondants : le produit des distances sera donné par la formule

$$y_1y_2y_3 = \frac{\beta^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}.$$

Le numérateur

$$\beta^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

et le dénominateur

$$a^6 + a^4\Sigma\lambda_1 + a^2\Sigma\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

sont des fonctions symétriques données par l'équation du troisième degré en λ écrite plus haut; tous calculs faits, l'expression du produit se réduit simplement à

$$y_1y_2y_3 = -\frac{b^4\beta}{c^2},$$

de même

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{a^4 \alpha}{c^2}.$$

On arrive donc à ce résultat d'une grande simplicité que le produit des distances à un axe des points d'intersection des lignes conjointes est à la distance correspondante du centre du cercle dans le rapport de la quatrième puissance de l'axe qui lui correspond au carré de la distance focale.

Il est à remarquer que ces expressions sont indépendantes de la grandeur du cercle.

Les coordonnées du centre du cercle osculateur en un point (x, y) d'une conique sont des cas particuliers de ces formules.

Imaginons que trois points d'intersection de la conique et du cercle viennent à coïncider : α, β seront alors les coordonnées du centre du cercle osculateur. Les trois points d'intersection des cordes communes viennent se confondre au triple point où le cercle rencontre la conique. On a alors pour α et β

$$\alpha = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad \beta = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

formules connues par beaucoup d'autres méthodes.

Pour la parabole, nous agirons un peu différemment.

Les sécantes communes au cercle et à la courbe ont pour équation

$$y^2 - 2px + \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2] = 0,$$

λ est une des racines de l'équation

$$\begin{aligned} &\lambda^3(\alpha^2 + \beta^2) + \lambda^2(R^2 - \beta^2 + 2p\alpha) \\ &\quad - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 - 2p\alpha - p^2) + p^2 = 0. \end{aligned}$$

Pour avoir des expressions simples et indépendantes du rayon du cercle, prenons la somme des distances des

points d'intersection des lignes conjointes à la tangente au sommet de la parabole.

On a alors

$$x_1 + x_2 + x_3 = \alpha - p,$$

et, en prenant comme précédemment le produit des distances à l'axe de la courbe,

$$y_1 y_2 y_3 = -\beta p^2.$$

On en déduit, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur au point (x, y) de la parabole,

$$\alpha = 3x + p, \qquad \beta = -\frac{y^3}{p^2},$$

expressions connues.

De l'égalité $x_1 + x_2 + x_3 = \alpha - p$, on déduit :

Les triangles polaires conjugués à une parabole et à tous les cercles dont les centres sont sur une perpendiculaire à l'axe ont leurs centres de gravité également sur une perpendiculaire à l'axe.

CONDITION POUR QUE QUATRE DROITES SOIENT LES GÉNÉRATRICES D'UN MÊME SYSTÈME D'UN HYPERBOLOIDE;

Par un ancien élève de l'École Polytechnique.

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{X - x_1}{a_1} = \dfrac{Y - y_1}{b_1} = \dfrac{Z - z_1}{c_1}, \\ \dfrac{X - x_2}{a_2} = \dfrac{Y - y_2}{b_2} = \dfrac{Z - z_2}{c_2}, \\ \dfrac{X - x_3}{a_3} = \dfrac{Y - y_3}{b_3} = \dfrac{Z - z_3}{c_3}, \\ \dfrac{X - x_4}{a_4} = \dfrac{Y - y_4}{b_4} = \dfrac{Z - z_4}{c_4} \end{cases}$$

les équations des quatre droites ; posons

$$c_i y_i - b_i z_i = l_i, \qquad a_i z_i - c_i x_i = m_i, \qquad b_i x_i - a_i y_i = n_i,$$
$$c y - b z = l, \qquad a z - c x = m, \qquad b x - a y = n,$$

et soient

$$(2) \qquad \frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b} = \frac{Z - z}{c}$$

les équations d'une nouvelle droite. Pour que les droites (1) fassent partie des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde, il faut qu'une infinité de droites, telles que (2), les rencontrent ; il faut donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_i - x & y_i - y & z_i - z \\ a & b & c \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} = 0,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$, ce qui peut s'écrire

$$l a_i + m b_i + n c_i + a l_i + b m_i + c n_i = 0 ;$$

d'où l'on conclut

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a l_1 + b m_1 + c n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a l_2 + b m_2 + c n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a l_3 + b m_3 + c n_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a l_4 + b m_4 + c n_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Posant donc

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & l_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & l_4 \end{vmatrix} = L, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & m_1 \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{vmatrix} = M,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & n_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{vmatrix} = N,$$

on a

$$a L + b M + c N = 0.$$

Cela doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de a, b, c et, en particulier, pour des valeurs a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''', telles que l'on n'ait pas

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0,$$

sans quoi les directions a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''' seraient parallèles à un même plan; donc on doit avoir

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0:$$

telles sont les conditions cherchées.

NÉCROLOGIE.

Nous avons le regret d'annoncer à nos lecteurs la mort de M. Moret-Blanc, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée du Havre. Notre infatigable collaborateur, qui a fourni aux *Nouvelles Annales* les solutions de tant de *Questions*, est décédé à Salins (Jura), le 20 mars 1886.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Traité élémentaire des déterminants, contenant 299 exercices; par M. *L. Leboulleux*, licencié ès Sciences, professeur de Mathématiques. Genève, H. Stapelmohr; 1886.

NOTE SUR LA BALANCE DE ROBERVAL

(Extrait du Cours de Mécanique de l'École Polytechnique);

Par M. H. RESAL.

Poinsot, dans sa *Statique*, ne considère cette balance que d'une manière abstraite, sans avoir égard à des accessoires qui jouent cependant le rôle principal au double point de vue de la sensibilité et de la stabilité. Il ne voit qu'une occasion d'appliquer sa théorie des couples à une question qu'il considère comme paradoxale, mais qui ne l'est, en réalité, que lorsque l'on veut tout expliquer au moyen de la simple théorie du levier. Il arrive au résultat voulu en disposant de deux couples sur le système articulé, comme si ce système était invariable, méthode dangereuse qui, dans l'étude d'autres systèmes articulés, pourrait conduire à de graves erreurs.

La dernière édition de Poinsot a paru en 1842 : c'est postérieurement à cette date que la balance de Roberval a été tirée de l'oubli et que son usage s'est considérablement répandu pour des pesées qui ne dépassent pas certaines limites. Les Ouvrages actuels de Mécanique et de Physique ne la signalent qu'au point de vue de Poinsot ou la passent sous silence. Les Biographies ne la mentionnent pas dans les articles consacrés à Roberval [Gilles Personne (de), 1602-1675].

Soit $ABA'B'$ un rectangle articulé dont le plan moyen est vertical ; les côtés horizontaux AB, $A'B'$ peuvent respectivement se mouvoir autour d'axes fixes passant par leurs milieux O, O' et sont symétriques par rapport au plan vertical dont la trace sur le plan moyen est la droite qui joint ces milieux ; leurs centres de gravité g,

g' sont censés situés en contre-bas de leurs directions. Les côtés latéraux sont identiques.

En admettant que la forme de la figure soit rendue invariable au moyen d'entraves, je supposerai que l'on fixe à ces derniers côtés deux solides dont les poids seront désignés par μ, μ'.

Soient $\overline{OA} = l$, $\overline{Og} = e$, $\overline{O'g'} = e'$; q, q' les poids des fléaux AB, A'B'; $P + p$, P deux poids adaptés aux deux points n, n' des masses $\frac{\mu}{g}$, $\frac{\mu'}{g}$.

En enlevant les entraves, le système prendra une forme d'équilibre dans laquelle le rectangle sera devenu un parallélogramme; on distinguera par l'indice 1 les lettres qui se rapportent à la déformation.

Si l'on désigne par θ l'angle AOA_1, le principe du travail virtuel donne

$$(P + p + \mu)\,\delta.l\sin\theta - (P + \mu')\,\delta.l\sin\theta + q\,\delta.e\cos\theta + q'\,\delta.e'\cos\theta = 0;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(p + \mu - \mu')\,l}{qe + q'e'},$$

en remarquant que le centre de gravité de l'ensemble des tringles latérales n'a pas changé de position.

Pour que, après avoir supprimé le poids additionnel p, les côtés AB, A'B' reprennent l'horizontalité, il faut que $\mu = \mu'$, et alors on a

$$(a) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{pl}{qe + q'e'}.$$

Si l'on suppose que les masses $\frac{\mu}{g}$, $\frac{\mu'}{g}$ comportent chacune un plateau, on aura la balance de Roberval considérée dans toute sa généralité.

On voit ainsi que : 1° les plateaux peuvent être situés à une distance quelconque des côtés AA', BB' et

placés à une hauteur également quelconque, pourvu que les masses de leurs systèmes soient égales; 2° la position des charges P sur les plateaux est indifférente relativement au bon fonctionnement de l'instrument.

La formule (a) se discutera comme celle qui se rapporte à la balance ordinaire.

CONSTRUCTION DES POINTS DOUBLES DE LA PROJECTION DE LA COURBE D'INTERSECTION DE DEUX CONES OU CYLINDRES DU SECOND DEGRÉ. CONSIDÉRATIONS SUR LE THÉORÈME DE DESARGUES;

Par M. H. PICQUET.

1. Il est d'usage, dans certains Cours de Géométrie descriptive, après avoir construit la droite qui joint les points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré, de ne pas achever la détermination de ces points, sous prétexte que la construction à intervenir ne serait ni simple, ni utile. Si, cependant, on peut affirmer d'un côté que, dans la résolution d'un problème graphique, les éléments qui doivent concourir à la connaissance des résultats ne sont jamais en trop grand nombre, vu qu'il est toujours loisible de négliger ceux d'entre eux qui pourraient paraître entachés d'erreur; il est évident, d'autre part, que la solution du problème énoncé ne peut atteindre un degré de complication bien élevé, puisqu'il est du second degré et n'exige, par suite, que l'usage de la règle et du compas. Il m'a donc paru intéressant de rechercher cette construction, et voici celle que je propose. Elle est entièrement fondée sur le théorème de

Desargues, généralisé par Sturm, qui est enseigné aujourd'hui dans la plupart des classes de Mathématiques spéciales, et que j'énonce ainsi pour faire voir de quelle façon j'estime que l'on doit envisager des couples de points en involution :

Toutes les coniques d'un faisceau linéaire (c'est-à-dire circonscrites à un quadrilatère dont les sommets sont réels ou imaginaires conjugués deux à deux) sont coupées par une droite suivant des couples de points conjugués harmoniques à deux points fixes, réels ou imaginaires conjugués.

Cela posé, supposons que l'on ait construit, comme d'habitude, la ligne des points doubles, et considérons le plan qui la projette. Ce plan coupe les deux surfaces suivant deux coniques ayant, par construction, deux cordes communes perpendiculaires au plan de projection et dont les pieds sur ce plan sont les points doubles cherchés. Dans le plan projetant, une droite quelconque coupe les deux coniques et ces deux cordes suivant six points en involution, qui se projettent aussi, sur la droite des points doubles, suivant six points en involution. Or ces points s'obtiennent immédiatement, si l'on considère en particulier les droites d'intersection du plan projetant avec les plans auxiliaires qui ont servi à déterminer les points de la courbe d'intersection. Ce sont précisément les couples de points d'intersection de la droite des points doubles avec les couples de génératrices fournis, respectivement dans chaque surface, par les divers plans auxiliaires. On a donc ce théorème :

Les points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré sont les extrémités du segment commun à une infinité d'involutions dont l'une, quelconque, est déterminée par

les deux couples de points d'intersection de la droite qui les joint avec les deux couples de génératrices résultant de l'intersection de l'un quelconque des plans auxiliaires avec les deux surfaces.

Le problème est donc résolu théoriquement, et la construction peut s'effectuer, comme on sait, au moyen de cinq cercles ([1]). Mais, en choisissant convenablement les plans auxiliaires, elle peut se simplifier par l'emploi de trois cercles seulement, s'il existe deux plans limites, c'est-à-dire si la trace de la droite des sommets sur le plan qui projette la ligne des points doubles n'est pas à la fois à l'intérieur des traces des deux cônes sur ce plan.

Choisissons ces plans pour plans auxiliaires : chacune des deux involutions est alors définie par deux segments dont l'un est de longueur nulle. Ses points doubles sont alors : l'un, le segment a réduit à zéro, et l'autre, le conjugué harmonique b de a par rapport à l'autre couple ; ce conjugué harmonique se construit immédiatement au moyen d'une parallèle à l'une des deux génératrices qui fournissent le couple dont les extrémités sont différentes, laquelle est déjà tracée sur l'épure si la surface correspondante est un cylindre. Le segment commun à deux involutions dont on connaît les points doubles s'obtient alors, comme on sait, au moyen de trois cercles. D'où la règle suivante :

Pour construire les points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré, on cherchera, sur la droite qui les joint les points a, α et β situés en même temps sur les

---

([1]) Si aa', bb', cc', dd' sont les quatre couples de points fournis par deux plans auxiliaires, et A un point quelconque du plan, ces cinq cercles sont les suivants : Aaa' et Abb' qui se coupent en B, Acc' et Add' qui se coupent en C, et ABC.

génératrices auxquelles donne lieu l'un des plans limites. On tracera le conjugué harmonique b de a par rapport à α et β. On fera la même opération avec l'autre plan limite, ce qui fournira deux autres points a' et b'. Par les points a et b, on tracera un cercle quelconque; par les points a' et b', on tracera un autre cercle quelconque rencontrant le premier. L'axe radical de ces cercles coupera la droite des points doubles en leur point milieu, et le cercle décrit de ce point comme centre avec la longueur commune de la tangente menée de ce point aux deux premiers cercles passera par les points cherchés.

2. Je saisis cette occasion pour donner, à l'usage des Cours où il n'est pas question d'involution, une démonstration très simple du théorème de Desargues.

Lemme I (immédiat). — *Les polaires d'un point fixe par rapport à toutes les coniques d'un faisceau linéaire sont concourantes.*

Je passe sous silence sa démonstration qui est donnée dans tous les Cours.

Lemme II. — *Il y a, dans tout faisceau linéaire, deux coniques, réelles ou imaginaires conjuguées, tangentes à une droite donnée.*

Ceci résulte de ce que la relation qui exprime le contact d'une droite et d'une conique (équation tangentielle de la conique) est du second degré par rapport aux coefficients de la conique. Cette relation est également donnée dans tous les Cours.

Cela posé, si Q est le point de concours des polaires de P, il résulte de la définition de la polaire que la droite PQ coupe toutes les coniques du faisceau suivant

des couples de points conjugués harmoniques à P et à Q.

Réciproquement, sur toute droite du plan, il existe un couple de points PQ; ce sont les points de contact de la droite avec les deux coniques du faisceau qui lui sont tangentes : car la polaire de P par rapport à l'une d'elles est la droite considérée, et par rapport à l'autre, c'est une droite passant par Q. C. Q. F. D.

Je serai heureux si je puis contribuer par ce qui précède à la vulgarisation du théorème et à son introduction dans les Cours où il ne figure pas encore. Il y mérite vraiment une place et, à mon avis, une place plus large que le théorème de Pascal, dont on peut presque dire que c'est un hasard. Non seulement le théorème de Pascal n'a point d'analogue dans la théorie des courbes et surfaces de degré supérieur; mais, quoique beaucoup d'auteurs aient essayé de construire par un théorème analogue le dixième point d'une surface du second degré dont neuf autres sont connus, je ne pense pas qu'on puisse véritablement dire qu'aucun d'eux ait réussi. Le théorème de Desargues, au contraire, puise sa raison d'être dans ce fait que les courbes auxquelles il s'applique sont les coniques d'un faisceau *linéaire*, c'est-à-dire dans la définition même du système, définition dont il n'est qu'un corollaire évident; il donne une construction relativement simple de la surface du second degré dont on connaît neuf points; il a son analogue dans tout faisceau linéaire de courbes ou de surfaces algébriques, et nul doute que l'étude des involutions de degré supérieur au second ne permette d'en déduire une construction linéaire, lorsque l'une de ces courbes ou surfaces est déterminée linéairement.

Le théorème de Pascal n'a guère d'autre application que la construction de la conique par cinq points, donnés effectivement, et ses cas particuliers. Le théorème de

Desargues fournit aussi la solution linéaire du même problème, en donnant le second point d'intersection de la courbe avec une droite passant par l'un des cinq points; en outre, il permet de construire linéairement (par points, si l'une seulement des conditions est un point) une conique assujettie à cinq conditions linéaires quelconques, dont la plus générale est, comme on sait, d'être harmoniquement circonscrite à une conique donnée. Si cette conique se réduit à deux points, la condition consiste alors à être conjuguée à un couple de points, et le théorème lui-même exprime que, sur toute droite du plan, il existe un couple de points conjugués qui résulte de quatre conditions-points. Comme cas particulier, et c'est là une véritable supériorité sur le théorème de Pascal, le théorème de Desargues permet de construire, par la règle seule, autant de points que l'on veut de la conique passant par un point *donné effectivement* et par quatre autres, *qui sont les points communs à deux coniques, déterminées chacune par cinq conditions linéaires quelconques, par exemple, par cinq points.*

DÉTERMINATION DES SYSTÈMES DE CARTES DE GÉOGRAPHIE DANS LESQUELS TOUS LES CERCLES DE LA SPHÈRE SONT REPRÉSENTÉS PAR DES CERCLES;

PAR M. M. DU CHATENET.

Le cercle est la plus intéressante de toutes les courbes que l'on peut tracer sur une sphère; on a très souvent besoin de le représenter sur une carte, soit pour figurer les parallèles, soit pour exécuter diverses constructions graphiques. Il sera donc avantageux d'avoir des systèmes

de cartes dans lesquels un cercle quelconque de la sphère sera représenté par une courbe simple et facile à décrire, avec la règle et le compas. Comme on ne peut concevoir de cartes telles que tous les petits cercles soient transformés suivant des droites, nous chercherons quelles sont celles qui permettent de les représenter par des cercles.

Pour fixer sur le plan de la carte la position d'un point de la sphère déterminé par sa longitude α et sa latitude λ, nous adopterons les coordonnées rectilignes ordinaires x, y et nous poserons

$$u = x + y\sqrt{-1}, \qquad v = x - y\sqrt{-1}.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de la sphère en prenant l'axe des pôles pour axe des Z, et l'équateur pour plan des XY. Les équations d'un cercle seront celle de la sphère et celle d'un plan quelconque. On aura son équation sphérique en prenant pour unité le rayon de la sphère et remplaçant XYZ en fonction de α et λ,

$$X = \cos\lambda\cos\alpha, \qquad Y = \cos\lambda\sin\alpha, \qquad Z = \sin\lambda.$$

L'équation générale des cercles sera donc

$$\sin\lambda + (A\cos\alpha + B\sin\alpha)\cos\lambda + C = 0,$$

ce qui peut aussi s'écrire comme il suit

$$2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)(A\cos\alpha + B\sin\alpha)$$
$$+ (C - 1)\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) + C + 1 = 0.$$

Nous poserons, pour la commodité du calcul,

$$p = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha),$$

$$q = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha).$$

L'équation sphérique des cercles deviendra alors de la forme

$$pq + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{H} = 0. \tag{1}$$

Prenons son équation différentielle caractéristique en considérant q comme variable indépendante.

En égalant à zéro les trois dérivées successives, nous aurons

$$q\frac{dp}{dq} + \mathrm{P}\frac{dp}{dq} + p + \mathrm{Q} = 0,$$

$$q\frac{d^2p}{dq^2} + \mathrm{P}\frac{d^2q}{dq^2} + 2\frac{dp}{dq} = 0,$$

$$q\frac{d^3p}{dq^3} + \mathrm{P}\frac{d^3p}{dq^3} + 3\frac{d^2p}{dq^2} = 0.$$

En éliminant P et Q entre ces trois équations, nous obtenons l'équation différentielle cherchée

$$2\frac{dp}{dq}\frac{d^3p}{dq^3} = 3\left(\frac{d^2p}{dq^2}\right)^2. \tag{2}$$

Étant donnée la position d'un point de la sphère par ses coordonnées p et q, nous pourrons connaître sa position sur la carte si nous connaissons les relations

$$u = \varphi(p, q), \qquad v = \psi(p, q), \tag{3}$$

qui lient les coordonnées planes aux coordonnées sphériques. Le problème revient donc à déterminer la forme des fonctions φ et ψ.

L'équation générale des cercles sur la carte est

$$x^2 + y^2 + mx + ny + s = 0.$$

Remplaçons x et y en fonction de u et v; cette équation deviendra

$$uv + \mathrm{M}u + \mathrm{N}v + \mathrm{S} = 0; \tag{4}$$

par conséquent l'équation suivante

$$\varphi\psi + \mathrm{M}\varphi + \mathrm{N}\psi + \mathrm{S} = 0 \tag{5}$$

devra être celle du cercle de la sphère correspondant au cercle de la carte défini par (4).

Formons son équation différentielle caractéristique en prenant les trois dérivées successives, q étant considéré comme variable indépendante, nous aurons les trois équations qui suivent

$$\varphi\psi' - \psi\varphi' - M\varphi' - N\psi' = 0,$$
$$\varphi\psi'' - \psi\varphi'' - 2\varphi'\psi' + M\varphi'' - N\psi'' = 0,$$
$$\varphi\psi''' - \psi\varphi''' + 3\varphi''\psi' - 3\psi''\varphi' - M\varphi''' - N\psi''' = 0.$$

En éliminant M et N entre ces trois relations, nous aurons l'équation différentielle cherchée

$$(6) \qquad 2\varphi'\psi'(\psi\varphi''' - \varphi\psi''') = 3\psi'^2\varphi''^2 - 3\varphi'^2\psi''^2.$$

Cette équation ne doit pas différer de l'équation (2) caractéristique des cercles de la sphère. Nous exprimerons donc que les coefficients des équations (2) et (6) sont proportionnels.

Le développement de l'équation (6) serait extrêmement compliqué; mais on peut facilement calculer le coefficient de $\frac{d^3p}{dq^3}$. Ce sera, après réduction,

$$2\left(\frac{d\psi}{dq}\frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right) \times \left[\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dp}\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} + \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)\frac{dp}{dq} + \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dq}\right].$$

Or, dans l'équation (2), le coefficient de $\frac{d^3p}{dq^3}$ est simplement $2\frac{dp}{dq}$. Il faut donc, pour que les relations (2) et (6) puissent être identiques, que l'on ait à la fois

$$\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dp} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dq} = 0.$$

Ces conditions seront satisfaites quand on aura

$$\frac{d\varphi}{dq} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dp} = 0.$$

En vertu de la symétrie de toutes les formules précédentes, les conditions $\frac{d\varphi}{dp} = 0$, $\frac{d\psi}{dp} = 0$ ne sauraient introduire dans le résultat définitif une solution distincte.

Nous voyons donc ainsi que φ et ψ ne devront chacun contenir que l'une des variables. Dès lors le développement de l'équation (6) devient réalisable. Nous aurons, en effet,

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dp}\,\frac{dp}{dq}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dq};$$

$$\varphi'' = \frac{d\varphi}{dp}\,\frac{d^2 p}{dq^2} + \frac{d^2\varphi}{dp^2}\left(\frac{dp}{dq}\right)^2, \qquad \psi'' = \frac{d^2\psi}{dq^2};$$

$$\varphi''' = \frac{d\varphi}{dp}\,\frac{d^3 p}{dq^3} + 3\,\frac{d^2\psi}{dp^2}\,\frac{dp}{dq}\,\frac{d^2 p}{dq^2} + \frac{d^3\psi}{dp^3}\left(\frac{dp}{dq}\right)^3, \qquad \psi''' = \frac{d^3\psi}{dq^3}.$$

En portant ces valeurs dans (6), l'équation simplifiée deviendra

$$2\,\frac{dp}{dq}\left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\frac{d^3 p}{dq^3} + \left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2\left[2\,\frac{d\varphi}{dp}\,\frac{d^3\varphi}{dp^3} - 3\left(\frac{d^2\varphi}{dp^2}\right)^2\right]\left(\frac{dp}{dq}\right)^4$$
$$+ \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\left[2\,\frac{d\psi}{dq}\,\frac{d^3\psi}{dq^3} - 3\left(\frac{d^2\psi}{dq^2}\right)^2\right] = 3\left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\left(\frac{d^2 p}{dq^2}\right)^2.$$

Les conditions pour que cette équation ne diffère pas de (2) sont

$$(7)\qquad \begin{cases} 2\,\dfrac{d\varphi}{dp}\,\dfrac{d^3\varphi}{dp^3} = 3\left(\dfrac{d^2\varphi}{dp^2}\right)^2, \\[2ex] 2\,\dfrac{d\psi}{dq}\,\dfrac{d^3\psi}{dq^3} = 3\left(\dfrac{d^2\psi}{dq^2}\right)^2. \end{cases}$$

Ces équations sont facilement intégrables et ont pour solution

$$\varphi = u = \frac{ap + b}{p + c}, \qquad \psi = v = \frac{a'q + b'}{q + c'}$$

ou, en résolvant par rapport à p et q,

$$p = \frac{cu - b}{a - u}, \qquad q = \frac{c'v - b'}{a' - v}.$$

On déduit de là

$$2x = u + v = \frac{ap+b}{p+c} + \frac{a'q+b'}{q+c'},$$

$$2y\sqrt{-1} = u - v = \frac{ap+b}{p+c} - \frac{a'q+b'}{q+c'},$$

ou

$$2x = \frac{\begin{bmatrix}(a+a')R^2+(ac'+ca'+b+b')R\cos\alpha \\ +(b'+ac'-b-a'c)R\sin\alpha\sqrt{-1}+bc'+cb'\end{bmatrix}}{R^2+(c+c')R\cos\alpha+\sqrt{-1}(c'-c)R\sin\alpha+cc'},$$

$$2y\sqrt{-1} = \frac{\begin{bmatrix}(a-a')R^2+(b-a'c+ac'-b')R\cos\alpha \\ +(ac'-b'-b+ac')R\sin\alpha\sqrt{-1}+bc'-cb'\end{bmatrix}}{R^2+(c+c')R\cos\alpha+\sqrt{-1}(c'-c)R\sin\alpha+cc'},$$

en posant

$$R = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right).$$

Pour que le problème ait une solution, il faut que les valeurs de x et y soient réelles.

Pour que x soit réel, il faut les conditions

$$c = c', \qquad b' + ac' - b - a'c = 0.$$

Pour que y soit réel, il faut avoir

$$a = a', \qquad b - a'c + a'c - b' = 0, \qquad bc' - cb' = 0.$$

Ces diverses conditions se réduisent à

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c = c'.$$

Les formules précédemment obtenues se simplifient donc et deviennent

(8) $$u = \frac{ap+b}{p+c}, \qquad v = \frac{aq+b}{q+c},$$

(9) $$p = \frac{cu-b}{a-u}, \qquad q = \frac{cv-b}{a-v},$$

(10) $$x = \frac{aR^2+(b+ac)R\cos\alpha+bc}{R^2+2cR\cos\alpha+c^2}, \qquad y = \frac{(ac-b)R\sin\alpha}{R^2+2cR\cos\alpha+c^2}.$$

Les formules (10) pourront donc servir pratiquement à fixer sur la carte un point de la sphère connu par sa longitude et sa latitude et donnent la solution générale du problème que nous nous sommes posé.

Formons les équations qui représentent sur la carte les parallèles et les méridiens de la sphère, c'est-à-dire son canevas géographique.

Nous obtiendrons l'équation des parallèles sur la carte en multipliant l'une par l'autre les relations (9)

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{(cu - b)(cv - b)}{(a - u)(a - v)}$$

ou

$$(11) \qquad \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{(cx - b)^2 + c^2 y^2}{(x - a)^2 + y^2}.$$

Nous obtiendrons l'équation des méridiens sur la carte, en divisant l'une par l'autre ces mêmes relations (9),

$$\frac{\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha} = \frac{(cu - b)(a - v)}{(cv - b)(a - u)}$$

ou

$$(12) \qquad c(x^2 + y^2) - (ac + b)x + (b - ac)y\cot\alpha + ab = 0.$$

Les équations (11) et (12), d'après la nature même de la question, représentent des cercles.

L'équation (11) montre que les divers cercles de latitude sont figurés par des cercles ayant leur centre sur une même droite, l'axe des x. Lorsque $\lambda = \frac{\pi}{2}$, l'équation du cercle représente un point figurant le pôle terrestre dont les coordonnées seront $x = \frac{b}{c}$, $y = 0$. Quand $\lambda = -\frac{\pi}{2}$, l'équation (11) donne un cercle réduit à un point $x = a$, $y = 0$, figurant l'autre pôle. Les centres des parallèles sur la carte se trouvent donc sur la

droite joignant les points qui représentent les pôles terrestres.

Pour avoir l'équation de l'équateur, il suffira dans (11) de faire $\lambda = 0$, ce qui donne

$$(13) \qquad (1 - c^2)(x^2 + y^2) - 2(bc - a)x + a^2 - b^2 = 0.$$

Lorsque $c = 1$, l'équateur se réduira à une droite.

Lorsque $c = 0$, les parallèles sont figurés sur la carte par des cercles concentriques et le centre commun sera la représentation de l'un des pôles.

L'équation (12) des méridiens montre, ainsi qu'on pouvait le prévoir, que les cercles qui les représentent ont tous deux points communs, les pôles, et par conséquent leurs centres sur la perpendiculaire menée par le milieu de la ligne des pôles. Lorsque $c = 0$, c'est-à-dire lorsque les parallèles forment des cercles concentriques, les méridiens forment sur la carte des droites issues de l'un des pôles.

Lagrange a montré que, dans tout système de cartes où les angles sont conservés en vraie grandeur, les coordonnées d'un point de la carte sont

$$(14) \qquad x = f(p) + f_1(q), \qquad y = \sqrt{-1}\,[f_1(q) - f(p)].$$

Or on peut déduire des équations (8)

$$(15) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{aq - b}{q + c} + \dfrac{ap - b}{p - c}\right), \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}\left(\dfrac{aq - b}{q + c} - \dfrac{ap - b}{p - c}\right). \end{cases}$$

Ces formules rentrent dans la famille des précédentes. On peut donc dire que, lorsque tout cercle de la sphère est représenté par un cercle, les angles sont conservés.

On peut donner aux formules (10) une forme plus

simple en prenant pour origine des coordonnées un point de l'axe des X, tel que le coefficient de R au numérateur de x devienne nul. En posant $m = \frac{ac - b}{2c}$, on aura, dans ce cas,

$$(16)\qquad x = \frac{m(R^2 - c^2)}{R^2 - 2cR\cos\alpha + c^2}, \qquad y = \frac{2mcR\sin\alpha}{R^2 + 2cR\cos\alpha + c^2}.$$

On sait que la projection stéréographique jouit de la propriété qui fait l'objet de cette étude. Si l'on appelle l la latitude de l'extrémité du diamètre passant par le point de vue, les formules donnant la position d'un point sur la carte, ainsi qu'on peut le démontrer géométriquement par une recherche directe, seront

$$x = \frac{n}{\cos l}\,\frac{R^2(1 - \sin l) - (1 - \sin l)}{R^2(1 - \sin l) - 2R\cos l\cos\alpha + 1 + \sin l},$$

$$y = \frac{2nR\sin\alpha}{R^2(1 - \sin l) - 2R\cos l\cos\alpha + 1 + \sin l}.$$

Pour que ces formules soient identiques aux précédentes, il faut et il suffit que $m = \frac{n}{\cos l}$, $c = \frac{\cos l}{1 - \sin l}$; par conséquent à des valeurs quelconques de m et de c correspondront des valeurs bien déterminées de n et l.

Nous pouvons donc maintenant énoncer le théorème suivant :

Parmi tous les systèmes qui peuvent servir à représenter sur un plan les figures tracées sur une sphère, la projection stéréographique est le seul dans lequel un cercle quelconque de la sphère sera représenté par un cercle.

SUR LA DÉTERMINATION GÉOMÉTRIQUE DES BRACHISTOCHRONES;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN.

On donne, comme on le sait, le nom de *brachistochrone* à la ligne que doit suivre un point matériel, sollicité par des forces données, pour aller d'une position à une autre dans un temps minimum; quand la vitesse du mobile peut être déterminée directement par le théorème des forces vives, ce qui implique l'absence de résistances passives, la brachistochrone jouit de propriétés qui permettent de la déterminer sans recourir au calcul des variations. Je me propose d'établir ces propriétés par des considérations géométriques; j'étudierai ensuite la brachistochrone dans le voisinage du point de départ; enfin je déterminerai la courbe tout entière dans un cas assez étendu où elle n'est pas plane.

Je rappelle d'abord la solution d'un problème connu : étant donnés deux points A et B dans deux régions de l'espace séparées par une surface S, trouver sur cette surface un point M, tel qu'un mobile qui se meut avec la vitesse a dans la région qui contient A, avec la vitesse b dans la région qui contient B, doive suivre la ligne brisée AMB pour aller de A en B dans un temps minimum.

Soit M' un point quelconque de S, infiniment voisin du point cherché M; d'après le théorème de Fermat, les deux lignes brisées AMB, AM'B doivent être parcourues dans des temps égaux, en négligeant les infiniment petits du second ordre; on aura donc

$$\frac{AM - AM'}{a} + \frac{BM - BM'}{b} = 0;$$

on reconnait aisément que cette égalité revient à la suivante :

$$(1)\qquad \frac{\cos \mathrm{AMM}'}{a} + \frac{\cos \mathrm{BMM}'}{b} = 0.$$

On peut prendre la direction de MM′ perpendiculaire sur AM ; on voit qu'alors elle sera aussi perpendiculaire sur BM, et, comme elle l'est encore sur la normale MN à S, il faut que les droites MA, MB, MN soient dans un même plan.

Cela posé, j'appelle *angle d'incidence* et *angle de transmission* les angles aigus i et r que les routes AM et MB font avec la normale à S ; si l'on prend le point M′ dans le plan AMB, de manière que AMM′ soit aigu, on aura

$$\mathrm{AMM}' = 90^\circ - i, \qquad \mathrm{BMM}' = 90^\circ + r;$$

la relation (1) exprime que les sinus des angles d'incidence et de transmission sont entre eux dans le rapport de a à b ; cette relation, jointe à la condition que les plans des deux angles coïncident, permet de déterminer le point M. La ligne brisée AMB tourne sa convexité vers la partie de la normale à S qui se dirige du côté où la vitesse est la plus grande.

Supposons maintenant qu'un mobile doive aller de A en B en traversant un grand nombre de régions séparées par des surfaces données, et dans chacune desquelles il se meuve avec une vitesse donnée ; cherchons la ligne brisée L qu'il doit suivre pour aller de A en B dans un temps minimum. Soient $M, M_1, M_2, \ldots, M_n$ $n+1$ sommets consécutifs de L, situés sur les surfaces $S, S_1, \ldots, S_n$. Les résultats précédents sont applicables aux deux côtés qui se coupent sur une surface quelconque S_k ; donc le plan de trois sommets consécutifs M_{k-1}, M_k, M_{k+1} contient la normale à la surface séparatrice S_k au sommet M_k ;

c'est un premier caractère de L. Pour en trouver un autre, considérons les angles d'incidence et de transmission i_k et r_k relatifs à la surface S_k, les vitesses v_k et v_{k+1} dont le mobile est animé avant d'atteindre cette surface, et après l'avoir traversée; on aura

$$(2)\qquad \frac{\sin i}{v} = \frac{\sin r}{v_1}, \qquad \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin r_1}{v_2}, \qquad \ldots.$$

Lorsque les surfaces S_k sont des plans parallèles, on voit que L est tout entière dans un plan perpendiculaire aux plans S; de plus, $r_1 = i_1$, $r_2 = i_2$, ...; le rapport $\frac{\sin i}{v}$ a une même valeur pour tous les sommets de L, ce qui caractérise cette ligne.

Pour le cas où les surfaces S_k sont quelconques, considérons l'angle $\varepsilon_k = r_k - i_k$ dont L s'infléchit en traversant S_k, et traitons les ε_k comme des infiniment petits; on aura

$$\frac{\sin i_k}{v_k} = \frac{\sin r_k}{v_{k+1}} = \frac{\varepsilon_k \cos i_k}{v_{k+1} - v_k}, \qquad \frac{\varepsilon_k}{v_{k+1} - v_k} = \frac{\operatorname{tang} i_k}{v_k}.$$

Ainsi l'on a

$$\frac{\varepsilon}{v_1 - v} = \frac{\operatorname{tang} i}{v},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{v_2 - v_1} = \frac{\operatorname{tang} i_1}{v_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\varepsilon_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{\operatorname{tang} i_n}{v_n}.$$

La somme des numérateurs des premiers membres divisée par la somme des dénominateurs donne un quotient compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\frac{\operatorname{tang} i_k}{v_k}$; si j'écris

$$(3)\qquad \frac{\varepsilon + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}{v_{n+1} - v} = \lambda \frac{\operatorname{tang} i}{v},$$

λ sera très voisin de l'unité quand la longueur $MM_1 \ldots M_n$ sera très petite.

Supposons que les surfaces S deviennent infiniment nombreuses et rapprochées les unes des autres; la ligne brisée L se transforme en une courbe C; la limite de $\varepsilon + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ est la courbure totale de l'arc vers lequel tend la ligne polygonale MM_n; on peut supposer que cet arc ait une longueur infiniment petite dS; sa courbure totale est alors $\frac{dS}{\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure; l'angle i, qui figure dans l'équation (3), est l'angle de la tangente à C au point quelconque M avec la normale à la surface S qui passe en ce point; λ devient égal à l'unité, et l'on a

$$(4) \qquad \frac{dS}{\rho\, dv} = \frac{\operatorname{tang} i}{v}.$$

Il résulte, d'ailleurs, de la remarque faite sur le plan qui contient trois sommets consécutifs de L que le plan osculateur à C en M est normal à S; cette condition, jointe à l'équation (4), détermine la ligne C que doit suivre un mobile pour aller de A à B dans un temps minimum, étant donnée la vitesse qu'il doit avoir en traversant chacune des surfaces S.

Cela posé, imaginons un point matériel m, soumis à l'action d'une force F, telle qu'on puisse, relativement à cette force, former l'intégrale des forces vives; il existe une infinité de surfaces de niveau correspondant à F, et l'on peut calculer la vitesse v que prendrait, en passant sur l'une quelconque S de ces surfaces, le point m, en supposant qu'il se meuve librement sous l'action de la seule force F, et qu'il parte d'un point A avec une vitesse connue v_0. D'autre part, nous savons déterminer la courbe C que devrait suivre un mobile μ, pour aller du point A jusqu'au point B dans un temps minimum, en supposant qu'il doive traverser chacune des surfaces S avec la vitesse v qui vient d'être définie.

Revenons à notre point m et supposons que, partant du point A avec la vitesse v_0, il soit obligé de suivre une courbe parfaitement polie et coïncidant avec C; il mettra, pour arriver au point B, le même temps que le point μ : il en résulte que C est la brachistochrone correspondant à la force F, puisque, d'une manière absolue, il n'est pas possible d'aller de A en B dans un temps inférieur à celui qu'exige le trajet suivant la route C, étant donnée la vitesse avec laquelle il faut traverser chacune des surfaces S.

Je n'insiste pas sur le cas simple où les surfaces de niveau sont des plans parallèles, comme cela arrive quand le point m est soumis à la seule action de la pesanteur; la brachistochrone est plane, et l'on en trouve une équation différentielle du premier ordre en exprimant que $\frac{\sin i}{v}$ est constant. Pour le cas où les surfaces de niveau sont quelconques, remplaçons, dans l'équation (4), ds par $v\,dt$: nous en tirerons

$$(5)\qquad \frac{v^2}{\rho} = \frac{dv}{dt}\tang i.$$

Cette équation a une interprétation mécanique simple. Au point M la force F, normale à S, est dans le plan osculateur à C et fait l'angle i avec la tangente; en outre, comme elle est, par rapport à S, dirigée du côté où la vitesse de m est la plus grande, la brachistochrone tourne vers elle sa convexité; donc la projection de F sur la normale principale à C sera égale à F $\sin i$ et dirigée en sens contraire du rayon de courbure. Faisons la masse de m égale à l'unité; $\frac{dv}{dt}$ sera égal à F $\cos i$, et $\tang i \frac{dv}{dt}$ sera la projection de F sur la normale principale à C. L'équation (5) exprime que cette projection

est égale en grandeur et en direction à la force centrifuge : cette condition, jointe avec celle que F doit être toujours située dans le plan osculateur à la brachistochrone, suffit pour déterminer cette courbe.

De ce qui précède, on peut conclure immédiatement que la pression exercée par le mobile m sur la brachistochrone est double de la composante de F normale à la courbe; toutes deux sont dirigées suivant le prolongement de la normale principale.

On peut établir deux propositions générales sur la forme de la brachistochrone dans le voisinage du point de départ A quand v_0 est nul. En premier lieu, je dis que la tangente en A a la même direction que la force F en ce point.

Supposons, en effet, que la force F_0 en A fasse l'angle φ avec la tangente à C, et considérons un très petit arc $AM = s$; au point M, le carré de la vitesse, égal à $2\int F \cos i \, ds$, est sensiblement égal à $2F_0 s \cos\varphi$; la composante normale de F diffère elle-même très peu de $F_0 \sin\varphi$, et l'on a

$$\frac{2F_0 s \cos\varphi}{\rho} = (1+\varepsilon)F_0 \sin\varphi,$$

ε étant une très petite quantité. L'arc AM peut être regardé comme contenu dans le plan osculateur en A; si donc α est l'angle de la tangente en M avec la tangente en A, ρ sera égal à $\frac{ds}{d\alpha}$, et l'on tirera de l'équation précédente

$$d\alpha = \frac{1+\varepsilon}{2} \operatorname{tang}\varphi \frac{ds}{s};$$

en intégrant à partir de $s = 0$, on voit que la courbure totale de l'arc AM est infinie : cet arc affecte la forme d'une spirale ayant A pour point asymptotique, ce qui

est en contradiction avec l'idée de brachistochrone; il faut donc que l'angle φ soit nul.

Je dis, en second lieu, que le rayon de courbure en A est nul, pourvu que la force F agissant sur un point quelconque de la tangente AT à C soit toujours dirigée suivant AT, ce qui arrive avec les forces que l'on considère le plus habituellement. La perpendiculaire MP abaissée du point M sur AT a une longueur égale à cs^m, c étant fini et $m > 1$: au point P la force F agirait suivant AT; au point M elle fait avec AT un angle de l'ordre de s^m. L'angle de la tangente en M avec AT est sensiblement

$$\alpha = \frac{d\text{MP}}{ds} = mcs^{m-1};$$

l'angle i ne diffère de α que d'un infiniment petit d'ordre supérieur. On a, d'ailleurs, à très peu près,

$$v^2 = 2\text{F}_0 s \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds};$$

l'équation (5) donne

$$2\text{F}_0 s \times m(m-1)cs^{m-2} = m(1+\varepsilon)\text{F}_0 cs^{m-1},$$

ε étant encore très petit; l'égalité se réduit à

$$2(m-1) = 1, \qquad m = \tfrac{3}{2},$$

ce qui conduit à une valeur infinie pour ρ.

Je vais déterminer la brachistochrone en supposant le point m, de masse 1, attiré vers une droite fixe Oz par une force F dirigée suivant la perpendiculaire mP abaissée sur Oz; soit $\text{F} = \varphi'(r)$, r étant la longueur de mP.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la brachistochrone par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; les composantes de F en ce point sont

$$-\frac{x}{r}\varphi'(r), \quad -\frac{y}{r}\varphi'(r), \quad 0;$$

la condition pour que F soit dans le plan osculateur est

$$x(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) = 0;$$

d'où, par une intégration facile, H étant une constante,

$$x\,dy - y\,dx = \mathrm{H}\,dz.$$

Rapportons C à des coordonnées cylindriques r, θ, z; je désigne par des lettres accentuées les dérivées relatives à l'arc s de la courbe, que je prends pour variable indépendante. La dernière relation nous donne

$$(6) \qquad r^2\theta' = \mathrm{H}z'.$$

Soient ρ le rayon de courbure de C au point m; λ, μ, ν les angles que ce rayon fait avec la perpendiculaire Pm, avec la normale au plan zOm, enfin avec Oz; on a, par des formules générales,

$$(7) \qquad \frac{\cos\lambda}{\rho} = r'' - r\theta'^2, \qquad \frac{\cos\mu}{\rho} = \frac{1}{r}\frac{d.r^2\theta'}{ds}, \qquad \frac{\cos\nu}{\rho} = z''.$$

Un moyen facile d'obtenir ces équations serait de considérer un point de masse 1 se mouvant sur une courbe sans être soumis à d'autre force que la réaction normale; cette réaction est égale à la force centripète, et, en égalant ses composantes aux composantes connues de l'accélération, on arrive aux formules (7).

On a, en tenant compte de la relation (6),

$$1 = r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2 = r'^2 + \frac{\mathrm{H}^2}{r^2}z'^2 + z'^2;$$

différentiant,

$$r'r'' - \frac{\mathrm{H}^2 r'}{r^3}z'^2 + \left(\frac{\mathrm{H}^2}{r^2} + 1\right)z'z'' = 0.$$

Les formules (7) deviennent

$$\frac{\cos\lambda}{\rho} = -\left(1 + \frac{\mathrm{H}^2}{r^2}\right)\frac{z'z''}{r'}, \qquad \frac{\cos\mu}{\rho} = \frac{\mathrm{H}}{r}z'', \qquad \frac{\cos\nu}{\rho} = z'';$$

d'où

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(1 + \frac{H^2}{r^2}\right)\left[\left(1 + \frac{H^2}{r^2}\right)\frac{z'^2}{r'^2} + 1\right] z''^2 = \left(1 + \frac{H^2}{r^2}\right)\left(\frac{z''}{r'}\right)^2.$$

La projection de F sur la normale principale étant égale à $\frac{v^2}{\rho}$, on a

$$-\cos\lambda \times -\varphi'(r) = \frac{v^2}{\rho}, \qquad \frac{\cos\lambda}{\rho}\varphi'(r) = \frac{v^2}{\rho^2}.$$

Le théorème des forces vives donne v^2, en supposant $v = 0$ pour $r = a$, et nous avons l'expression de $\frac{\cos\lambda}{\rho}$ et de $\frac{1}{\rho^2}$; il vient

$$-\left(1 + \frac{H^2}{r^2}\right)\frac{z'z''}{r'}\varphi'(r) = 2[\varphi(a) - \varphi(r)]\left(1 + \frac{H^2}{r^2}\right)\left(\frac{z''}{r'}\right)^2.$$

On peut tout diviser par $\left(1 + \frac{H^2}{r^2}\right)\frac{z''}{r'}$, et l'on trouve

$$\frac{-r'\varphi'(r)}{\varphi(a) - \varphi(r)} = 2\frac{z''}{z'}, \qquad \varphi(a) - \varphi(r) = K z'^2,$$

K étant une nouvelle constante. Si l'on remplace z'^2 par sa valeur

$$z'^2 = \frac{r^4\, d\theta^2}{H^2(dr^2 + r^2\, d\theta^2) + r^4\, d\theta^2},$$

on aura l'équation différentielle de la projection de la brachistochrone sur le plan des xy. En particulier, pour $\varphi'(r) = c^2 r$, on trouvera que cette projection a la forme d'une hypocycloïde, tout en étant d'espèce plus transcendante.

ÉTUDE SUR LES SECTIONS PLANES DES SURFACES. THÉORIE NOUVELLE DES PLANS CYCLIQUES ET DES OMBILICS;

PAR M. VICTOR LAC DE BOSREDON,
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique d'Angers.

Lorsqu'on veut étudier la forme d'une surface définie par une équation, on coupe la surface par des plans divers, et l'on examine la nature des sections ainsi obtenues. On trouve facilement les projections d'une section sur les plans coordonnés; mais la connaissance de ces projections ne donne qu'une idée imparfaite de la section elle-même.

Pour en déterminer la forme réelle, il est essentiel d'avoir son équation dans son propre plan. La Géométrie analytique fournit des formules qui permettent de trouver cette équation en coordonnées rectangulaires, lorsqu'on donne l'angle φ que fait avec la partie positive de l'axe des x la trace du plan sécant sur le plan xy, et l'angle θ que fait la normale au plan avec l'axe des z. En supposant le plan mené par l'origine des coordonnées, si l'on prend sa trace sur le plan xy pour le nouvel axe des x et une perpendiculaire à cette trace pour le nouvel axe des y, on a les formules suivantes

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\theta,\\ y &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi\cos\theta,\\ z &= y'\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules l'angle φ est compté en allant de ox vers oy dans l'angle des coordonnées positives, et

l'angle θ en allant de oz vers la perpendiculaire à la trace du plan sécant menée dans le plan xy.

Si le plan sécant, au lieu d'être mené par l'origine, passait au point (a, b, c), il faudrait remplacer dans ces formules x, y, z respectivement par $x - a$, $y - b$, $z - c$.

Mais il est rare que les formules précédentes puissent s'appliquer directement; car on ne connait pas les angles φ et θ. Il m'a semblé qu'il serait utile de les transformer, de manière à les rendre applicables dans le cas général, c'est-à-dire lorsque l'équation du plan se présente sous la forme $Ax + By + Cz + D = 0$.

En partant de cette idée, j'ai établi les formules qui servent de base à ce travail; puis je les ai appliquées à l'étude des sections planes des surfaces du second ordre. Après avoir établi quelques théorèmes fondamentaux, j'ai montré avec quelle facilité cette méthode conduit à la détermination des plans cycliques et des ombilics. Elle peut s'appliquer d'ailleurs à l'étude des sections planes d'une surface quelconque. J'ai indiqué sur un exemple comment elle sert à la résolution des problèmes.

Soit

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{2}$$

l'équation d'un plan sécant mené par l'origine des coordonnées. Il s'agit d'exprimer $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonction des coefficients de cette équation. On y arrive aisément par les considérations suivantes.

La trace du plan sécant sur le plan xy s'obtiendra en faisant $z = 0$ dans l'équation (2). On trouve ainsi

$$Ax + By = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = -\frac{A}{B}x.$$

Il en résulte

$$\tang\varphi = \frac{A}{B};$$

d'où

$$\sin^2\varphi = \frac{A^2}{A^2+B^2}$$

et, par suite,

$$\sin\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

D'autre part, on sait que $\cos\theta$ est donné par la relation

$$\cos\theta = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Il en résulte

$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Dans les valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ ainsi obtenues le radical est affecté du double signe. Cela tient à ce que l'angle φ est donné seulement par sa tangente.

Or à une tangente correspondent deux sinus et deux cosinus égaux et de signes contraires. Ces deux valeurs ne déterminent, pour la trace du plan sécant sur le plan xy, qu'une seule position. Elles correspondent aux deux directions opposées qu'elle présente à partir de l'origine. La direction des x' positifs reste ainsi arbitraire. Nous la déterminerons en convenant de prendre pour l'angle φ qu'elle fait avec la partie positive de l'axe des x l'angle qui correspond au signe $+$ du radical et nous écrirons, en mettant le signe de ce radical en évidence,

$$\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

De cette manière, si l'on suppose A positif, $\sin\varphi$ sera toujours positif, et $\cos\varphi$ sera positif ou négatif en même temps que B. Dans le premier cas, l'angle φ sera compris

entre o et $\frac{\pi}{2}$; dans le second, il sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

En particulier, si $A = 0$, φ sera nul ou égal à π suivant le signe de B; dans tous les cas, la trace du plan sécant coïncidera avec l'axe des x. Si $B = 0$, l'angle φ sera égal à $\frac{\pi}{2}$; la partie positive de l'axe des x' coïncidera avec la partie positive de l'axe des y.

Dans les valeurs de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, le radical

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

est aussi affecté du double signe.

Cela tient à ce que l'angle θ est donné seulement par son cosinus. Or à ce cosinus correspondent deux valeurs de θ égales et de signes contraires, ce qui détermine deux inclinaisons égales du plan sécant sur le plan xy à droite et à gauche de sa trace. Nous prendrons encore ici le radical $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ avec le signe $+$, et nous écrirons, en mettant le signe en évidence,

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

De cette manière, $\sin\theta$ sera toujours positif et $\cos\theta$ sera positif ou négatif en même temps que C. Dans le premier cas, l'angle θ sera compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; dans le second, il sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. En particulier, si A et B sont nuls, θ sera égal à o ou à π suivant le signe de C; la perpendiculaire élevée sur le plan sécant coïncidera avec l'axe des z, et le plan sécant se confondra avec le plan xy. Si C est nul, l'angle θ sera égal à $\frac{\pi}{2}$, et le plan sécant perpendiculaire sur le plan xy.

Avec ces conventions, les angles φ et θ varieront seulement entre o et π. La grandeur de chacun de ces angles sera déterminée par les signes des coefficients A, B, C, joints à leur valeur numérique.

Si on laisse ces coefficients arbitraires, le plan sécant $Ax + By + Cz = 0$ pourra occuper une position quelconque autour de l'origine, et par conséquent le plan $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$ une position quelconque autour du point (a, b, c).

En substituant, dans les formules (1), les valeurs de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$, $\cos\theta$, ainsi déterminées, on obtient les formules suivantes :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{Bx'}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{ACy'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ y &= \frac{Ax'}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{BCy'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ z &= y'\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir maintenant l'équation de la ligne d'intersection d'une surface par un plan, rapportée à deux axes rectangulaires tracés dans le plan sécant, il suffira de substituer dans l'équation de la surface les valeurs de x, y, z tirées des formules précédentes.

Nous supposons, bien entendu, que le plan sécant passe par l'origine des coordonnées. S'il était mené par le point (a, b, c), il faudrait remplacer, comme nous l'avons dit, x, y, z par $x - a$, $y - b$, $z - c$.

Il faut remarquer que les formules (3) sont linéaires par rapport aux variables. Par conséquent, si l'on substitue à la place de x, y, z les valeurs qu'elles fournissent dans une équation de degré m, le degré de cette équation ne changera pas.

Donc un plan coupe toujours une surface du degré m suivant une courbe de l'ordre m. En particulier, un plan coupe une surface du second ordre suivant une conique.

Les formules (3) supposent, il est vrai, que le plan sécant est mené par l'origine des coordonnées. Mais, si l'on veut le mener par un point quelconque (a, b, c) de l'espace, on pourra prendre ce point pour origine des coordonnées, ce qui ne changera pas le degré de l'équation de la surface, et les conclusions resteront les mêmes.

On peut voir encore que la section faite dans une surface du second ordre par un plan quelconque parallèle au plan sécant de l'origine est homothétique à la section déterminée par ce dernier plan.

En effet, si le plan sécant de l'origine a pour équation $Ax + By + Cz = 0$, tout plan parallèle à celui-là aura pour équation

$$Ax + By + Cz = K.$$

Ce plan coupe l'axe des z au point $\frac{K}{C}$, il passe donc au point $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{K}{C}$. Il suffira donc, pour avoir la section du nouveau plan, de remplacer dans les formules (3) z par $z - \frac{K}{C}$, ce qui n'altérera pas évidemment les coefficients des termes du second degré. Ainsi se trouve établie directement, et sans aucune transformation de coordonnées, l'homothétie des sections parallèles dans les surfaces du second ordre.

On peut déduire des formules (3), comme cas particuliers, quelques autres formules très utiles dans les applications.

Si $A = 0$, les formules (3) se réduisent aux sui-

vantes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x', \\ y &= \frac{Cy'}{\sqrt{B^2+C^2}}, \\ z &= \frac{By'}{\sqrt{B^2+C^2}}. \end{aligned}\right.$$

Si $B = 0$, on trouve

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{Cy'}{\sqrt{A^2+C^2}}, \\ y &= x', \\ z &= \frac{Ay'}{\sqrt{A^2+C^2}}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, si $C = 0$, il vient

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{Bx'}{\sqrt{A^2+B^2}}, \\ y &= \frac{Ax'}{\sqrt{A^2+B^2}}, \\ z &= y'. \end{aligned}\right.$$

Le plan sécant passe dans le premier cas par l'axe des x, dans le second par l'axe des y, dans le troisième par l'axe des z. La trace du plan sécant sur le plan xy se confond dans le premier cas avec l'axe des x, dans le second avec l'axe des y, et dans le troisième elle est représentée par l'équation même du plan sécant

$$Ax + By = 0.$$

Appliquons cette méthode à l'étude des sections planes des surfaces du second ordre, et considérons d'abord les sections circulaires.

Sections circulaires des surfaces du second ordre.

I. — Surfaces a centre.

Les surfaces du second ordre douées d'un centre unique peuvent être représentées par l'équation générale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si l'on substitue dans cette équation les valeurs de x, y, z fournies par les formules (3), on trouve

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{B^2}{a^2} + \frac{A^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{2ABC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) xy \\ &+ \frac{1}{A^2+B^2+C^2} \left[\frac{A^2C^2}{a^2} + \frac{B^2C^2}{b^2} + \frac{(A^2+B^2)^2}{c^2}\right] y^2 = A^2 + B^2 \end{aligned} \right.$$

On obtient ainsi pour section une conique. Cette conique appartiendra au genre ellipse, au genre hyperbole ou au genre parabole, suivant les valeurs attribuées aux coefficients des inconnues. Mais on peut remarquer déjà qu'on n'aura jamais une parabole proprement dite; car, lorsqu'une équation du second degré se présente sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

la condition

$$AC - B^2 = 0$$

rend le trinôme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ carré parfait, de sorte que l'équation peut s'écrire

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 + F = 0,$$

et elle représente deux droites parallèles. C'est ce qu'in-

dique aussi le discriminant de l'équation générale, qui se réduit alors à F(AC — B²). Il est nul, si AC — B² = o.

Cherchons maintenant à quelles conditions la section sera circulaire.

Pour que l'équation (7) représente un cercle, il faut d'abord que l'on ait

$$ABC = 0.$$

Ainsi l'un des trois coefficients A, B, C doit être nul, c'est-à-dire, que le plan sécant doit être mené par l'un des trois axes coordonnés ou, en d'autres termes, par l'un des trois axes de la surface.

Il résulte de là que, dans la recherche des plans cycliques, nous pouvons employer les formules réduites (4), (5) et (6).

Ellipsoïde.

Considérons d'abord l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Supposons, par exemple, B = o. Il faudra substituer dans l'équation de la surface les valeurs de x, y, z tirées des formules (5). On aura ainsi, en supprimant les accents des variables,

$$\frac{C^2 y^2}{a^2(A^2 + C^2)} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{A^2 y^2}{c^2(A^2 + C^2)} = 1.$$

Cette équation représentera un cercle, si l'on a

$$\frac{1}{A^2 + C^2}\left(\frac{C^2}{a^2} + \frac{A^2}{c^2}\right) = \frac{1}{b^2}$$

ou

$$(8) \qquad A^2 a^2 (b^2 - c^2) = C^2 c^2 (a^2 - b^2),$$

ce qui exige

$$a > b > c.$$

Donc l'axe b par lequel il faut mener le plan sécant doit être l'axe moyen de la surface.

L'équation du plan sécant se réduit alors à

$$Ax + Cz = 0,$$

et, si l'on remplace C par sa valeur tirée de la relation (8), elle devient

$$cx\sqrt{a^2 - b^2} \pm az\sqrt{b^2 - c^2} = 0.$$

On voit donc qu'il existe dans l'ellipsoïde deux plans cycliques. Les traces de ces plans sur le plan xz font avec l'axe des x des angles ψ déterminés par la relation

$$\tang\psi = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Ces plans sont donc également inclinés sur le plan déterminé par l'axe moyen et l'un des deux autres axes de la surface.

Le cercle de section a pour équation dans son plan, à cause de la relation (8),

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

et son rayon est égal au demi-axe b.

Dans les résultats qui précèdent, nous avons admis implicitement que les trois axes de l'ellipsoïde étaient inégaux. Examinons le cas où la surface a deux axes égaux.

Supposons, par exemple, $a = b$. Il résulte alors de la relation (8) que $A = 0$; par conséquent l'équation du plan sécant se réduit à $z = 0$. Ce plan se confond avec le plan xy, ce qui doit être, puisque alors l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe des z.

Enfin, si l'on a à la fois $a = b = c$, l'ellipsoïde devient une sphère. La relation (8) est vérifiée identiquement.

Donc toutes les sections faites par des plans menés par un axe quelconque de la surface sont des cercles, et comme tous les diamètres de la sphère sont des axes de la surface, il en résulte que toutes les sections planes sont circulaires.

Hyperboloïde à une nappe.

Considérons maintenant l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Pour avoir les plans cycliques, il suffit de remplacer dans la relation (8) c^2 par $-c^2$. On a ainsi l'équation de condition

$$(9) \qquad A^2 a^2 (b^2 + c^2) = C^2 c^2 (b^2 - a^2),$$

ce qui exige

$$b > a$$

On obtiendra donc un plan cyclique en menant le plan sécant par le plus grand des axes réels de la surface.

Le plan sécant a alors pour équation

$$Ax - Cz = 0$$

et, en remplaçant C par sa valeur tirée de la relation (9),

$$cx\sqrt{b^2 - a^2} \pm az\sqrt{b^2 + c^2} = 0.$$

Il existe donc deux plans cycliques, également inclinés sur le plan déterminé par le plus grand des axes réels et l'un des deux autres axes de la surface.

Le cercle de section a pour équation dans son plan

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Voyons maintenant si l'on peut obtenir une section circulaire, en menant le plan sécant par l'axe imaginaire de la surface.

Il faut alors supposer $C = 0$ et appliquer les formules (6). On trouve ainsi

$$\frac{B^2 x^2}{a^2(A^2 - B^2)} - \frac{A^2 x^2}{b^2(A^2 - B^2)} - \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{A^2 - B^2}\left(\frac{B^2}{a^2} - \frac{A^2}{b^2}\right) = -\frac{1}{c^2},$$

condition impossible à réaliser; par conséquent, un plan mené par l'axe imaginaire de l'hyperboloïde à une nappe ne peut pas être un plan cyclique.

Si la surface est de révolution, c'est-à-dire si $a = b$, la relation (9) est impossible, à moins que l'on n'ait $A = 0$. Le plan cyclique se confond alors avec le plan xy.

Hyperboloïde à deux nappes.

On déduira le cas de l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

de celui de l'ellipsoïde, en remplaçant dans la relation (8) b^2 et c^2 par $-b^2$ et $-c^2$. On trouve ainsi

$$(10) \qquad A^2 a^2 (b^2 - c^2) = C^2 c^2 (a^2 - b^2),$$

ce qui exige

$$b > c.$$

On obtiendra donc une section circulaire, en menant le plan sécant par le plus grand des axes imaginaires de la surface.

Le plan sécant, en vertu de la relation (10), a pour équation

$$cx\sqrt{a^2+b^2} \pm az\sqrt{b^2-c^2}=0.$$

Il existe donc deux plans cycliques, également inclinés sur le plan déterminé par le plus grand des axes imaginaires et l'un des deux autres axes de la surface.

Le cercle de section a pour équation dans son plan

$$x^2+y^2=-b^2,$$

par conséquent il est imaginaire. Donc le plan considéré ne rencontre pas la surface.

Mais, si l'on coupe l'hyperboloïde par un plan parallèle à celui-là, et ayant pour équation

$$\mathrm{A}x+\mathrm{C}z=\mathrm{K},$$

on aura des sections réelles pour des valeurs de K suffisamment grandes. En effet, ce plan coupe l'axe des x au point $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}$. Il passe donc au point $x=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}$, $y=0$, $z=0$; par conséquent, il faudra remplacer dans les formules (5) x par $x-\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}$, pour avoir la section faite par ce nouveau plan dans la surface. Si l'on substitue dans l'équation de l'hyperboloïde les valeurs de x, y, z tirées des formules (5) ainsi modifiées, il vient

$$\frac{y^2}{\mathrm{A}^2+\mathrm{C}^2}\left(\frac{\mathrm{C}^2}{a^2}-\frac{\mathrm{A}^2}{c^2}\right)+\frac{2\mathrm{CK}y}{\mathrm{A}a^2\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{C}^2}}-\frac{x^2}{b^2}=1-\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{A}^2a^2}.$$

Pour que cette section soit circulaire, il faut que l'on ait, comme précédemment,

$$\frac{1}{\mathrm{A}^2+\mathrm{C}^2}\left(\frac{\mathrm{C}^2}{a^2}-\frac{\mathrm{A}^2}{c^2}\right)=-\frac{1}{b^2}$$

ou

$$\mathrm{A}^2a^2(b^2-c^2)=\mathrm{C}^2c^2(a^2+b^2).$$

Supposons cette condition remplie et divisons l'équation par le coefficient de x^2, nous aurons

$$x^2+y^2-\frac{2Cb^2Ky}{Aa^2\sqrt{A^2+C^2}}=b^2\left(\frac{K^2}{A^2a^2}-1\right).$$

On obtiendra donc un cercle qui sera réel, dès que l'on donnera à K une valeur satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{K^2}{A^2}\left[1+\frac{C^2b^2}{a^2(A^2+C^2)}\right]>a^2$$

ou, en remplaçant le rapport $\frac{C}{A}$ par sa valeur tirée de la relation (10), à l'inégalité

$$\frac{K^2}{A^2}>\frac{a^2(a^2+c^2)}{a^2+b^2},$$

c'est-à-dire dès que l'on donnera au rapport $\frac{K}{A}$ une valeur absolue plus grande que $a\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}}$, c'est-à-dire enfin, dès que la distance à l'origine du point où le plan sécant rencontre l'axe des x sera supérieure à la quantité

$$a\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}}.$$

Voyons maintenant ce qui arrive lorsque le plan sécant passe par l'axe réel a de la surface.

Il faut alors supposer $A=0$ et appliquer les formules (4). On trouve ainsi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{C^2y^2}{b^2(B^2+C^2)}-\frac{B^2y^2}{c^2(B^2+C^2)}=1,$$

et, pour que cette section soit circulaire, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{B^2+C^2}\left(\frac{C^2}{b^2}+\frac{B^2}{c^2}\right),$$

relation impossible. Donc on n'obtient pas de section

circulaire en menant le plan sécant par l'axe réel de la surface.

Par conséquent, les seuls plans cycliques de l'hyperboloïde à deux nappes sont les plans parallèles aux deux plans représentés par l'équation

$$cx\sqrt{a^2+b^2} \pm az\sqrt{b^2-c^2} = 0,$$

en supposant que $2b$ désigne le plus grand des axes imaginaires de la surface. (*A suivre.*)

SAVIN REALIS.

Le 12 février, une lettre de M. Genocchi m'apprit une triste nouvelle : Realis, notre ami commun, venait de mourir.

L'illustre professeur de Turin ayant, depuis longues années, fréquenté le regretté défunt, pouvait, mieux que personne, rédiger la Notice biographique ; mais le mauvais état de sa santé ne lui permet pas de se charger de cette tâche honorable et douloureuse. Il m'a donc prié de le remplacer. On me pardonnera d'avoir accepté une mission pour laquelle les renseignements me faisaient défaut : mais le moyen de refuser? J'ai été, pendant bien longtemps en correspondance amicale et scientifique avec le savant dont il s'agit d'esquisser la vie : je *m'exécute* donc. Si je ne parviens pas à faire comprendre l'estime que les travaux et le caractère de Realis m'ont inspirée, le lecteur voudra bien m'accorder les *circonstances atténuantes* [1].

---

[1] Les pages suivantes sont traduites, en grande partie, d'un article de la *Gazette de Turin* (15 février 1886), rédigé par M. *Claretta*, parent du défunt. En outre, M. l'avocat-commandeur Realis,

I.

Savin Realis est né à Turin, le 18 octobre 1818. *Pierre Realis*, son père, avocat, Auditeur général de la Garde suisse palatine, était un jurisconsulte renommé. Le jeune Realis fut un excellent disciple de *Plana, Bidone, Giulio* et des autres savants qui brillaient à l'Université de Turin : il obtint, le 26 juillet 1839, le titre d'*Ingénieur hydraulique* (1).

En 1840, il manifesta le désir de *visiter d'autres terres et d'autres peuples* (2). Conduit à Paris, par son père, il y perfectionna ses connaissances scientifiques; suivit *avec succès*, pendant trois ans, les cours de l'École des Ponts et Chaussées, ainsi que le prouve un certificat de l'inspecteur de cette école, daté du 5 juillet 1843.

Pendant son séjour à Paris, où il fit quelques amis, Realis *conçut tant d'affection pour cette ville et pour la France* (3), qu'il résolut d'y venir passer quelques mois chaque année.

II.

Revenu dans sa patrie, le jeune ingénieur commença par publier, sous le titre de *Mémoire sur la construction des chemins de fer*, un résumé de ses études précédentes (4); après quoi il prit part aux études préparatoires pour la construction de la ligne du Tessin.

---

frère de l'Ingénieur, m'a fait transmettre, par M. Genocchi, certains détails complémentaires.

(1) En France, nous dirions plutôt : *Ingénieur hydraulicien*.

(2) *Gazette de Turin*.

(3) *Ibid*.

(4) Ici, MM. Realis et Claretta ne semblent pas être d'accord : le premier écrit « *un fruit de ces études (École des Ponts) fut la pu-*

En 1846, nommé *Ingénieur dans le corps du Génie civil, avec application* au service des chemins de fer, Realis dirigea la construction d'une partie du chemin de Turin à Gènes.

Il ne resta pas longtemps fonctionnaire, heureusement pour la Science des Nombres! Devenu ingénieur libre, il pratiqua son art, tout en publiant, çà et là ([1]), des travaux qui attirèrent l'attention. Les lecteurs des Revues mathématiques se rappellent combien ses Notes étaient intéressantes et claires. La plus récente a paru dans le journal de M. de Longchamps, *après* la mort de l'auteur. Ainsi, il a travaillé jusqu'à son dernier jour ([2])!

III.

Si Realis fut utile aux Sciences, il ne manqua pas de servir autrement son pays. En effet, pendant quelques années, il fut Membre du Conseil communal de Turin, Membre du *Conseil délégué* (?), Examinateur à l'École d'application du Génie, etc. Mais, chose remarquable, il se tint, de la manière la plus absolue, *en dehors de tout éclat* ([3]) et ne sollicita aucune espèce de *distinctions*.

Convaincu que les *Académies ont fait leur temps* ([4]), il n'appartint à aucune, au préjudice de ces Compa-

---

blication de l'Ouvrage sur la construction des chemins de fer », et le second « *à cette occasion* (sa nomination de Directeur) *il publia...* ».

([1]) *Gazette de Turin.*

([2]) Dans la Lettre citée au commencement, M. G. disait : « Je l'avais vu..., appelé à la gare, par M. L., député ». Cette sortie était imprudente : elle lui a peut-être coûté la vie!

([3]) *Gazette de Turin.*

([4]) *Gazette de Turin.* Opinion très contestable, comme le témoigne l'utile publication des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

gnies, qui auraient profité de ses excellentes Communications (1).

Non seulement Realis ne fut d'aucune Académie, mais il ne voulut être cité dans aucun Dictionnaire : il ne fut pas même décoré (2)!

IV.

A la fin d'avril 1881, passant à Turin, je fus reçu, à bras ouvert, par Genocchi et son disciple Realis. Celui-ci me fit, avec une grâce parfaite, les honneurs de la patrie de Lagrange.

Noble et admirable ville de Turin, d'où l'on voit, en *même temps,* des montagnes couvertes de neiges et des montagnes verdoyantes! Si elle n'est plus la capitale d'un royaume, elle est restée une capitale scientifique.

Je fus frappé de la vieillesse anticipée de Realis, sous le rapport physique : il avait mauvaise vue et marchait avec peine. Heureusement, la tête était excellente! Quand, en compagnie de son illustre ami, il me conduisit à la gare, il m'embrassa, en me disant : « au revoir. » Hélas! cet adieu devait être le dernier.

Après une courte maladie (une bronchite), Savin Realis est décédé le 9 février, à l'âge de 67 ans. Si, parmi les Géomètres contemporains, il n'a pas brillé au premier rang, il est, surtout dans la Théorie des Nombres, l'un des plus justement célèbres, et sa mémoire ne périra pas.

E. Catalan.

Liège, 15 mars 1886.

(1) *Gazette de Turin.* Par suite d'un étrange oubli, j'ai à me reprocher de n'avoir pas proposé Realis comme Membre correspondant de la *Société des Sciences,* de Liège.

(2) *Gazette de Turin.*

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Le proprieta fondamentali delle curve di second' ordine studiate sulla equazione generale di secondo grado in coordinate cartesiane. Lezioni date nella R. Università di Torino, dal prof. *Enrico d'Ovidio*. Seconda edizione riveduta ed aumentata. In-8°. Torino, Ermanno Loescher; 1883. Prezzo : lire 3,50.

Su la corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio. Ricerche sintetiche del Dottor *Domenico Montesano*. In-8°. Napoli, V. Pesole; 1885.

Essai sur le postulatum d'Euclide; par M. *J. Deschamps*, professeur au lycée de Montluçon. In-8°. Paris, A. Hermann; 1885.

Première leçon sur les déterminants; par M. *A. Tartinville*, professeur au lycée Saint-Louis. In-8°. Paris, Croville-Morant; 1885.

Traité de perspective linéaire, précédé du tracé des ombres usuelles (rayon a 45°) et suivi du rendu dans le dessin d'architecture et dans le dessin de machines; texte et dessins par M. *J. Pillet*. Grand in-4°. Paris, Delagrave, et Leipzig, Le Soudier; 1885. Prix : 12fr.

Annuaire pour l'an 1886, publié par le Bureau des Longitudes; contenant les Notices suivantes : Les treize tornados des 29 et 30 mai 1879, aux États-Unis, par *H. Faye*. — Sur le méridien et l'heure universels, par *Janssen*. — Discours prononcés aux funérailles de Serret, par *H. Faye* et *O. Bonnet*. In-18, de 924 pages, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 1fr,50.

Annuaire de l'observatoire de Montsouris pour l'an 1886, contenant les Notices suivantes : Observations météorologiques faites à l'observatoire de Montsouris, résumées par *Léon Descroix*. — Météorologie appliquée à l'Agriculture et à l'Hygiène, par *L.-H. Marié-Davy* et *Ferdinand Marié-Davy*. — Analyse chimique de l'air, des eaux météoriques, des eaux d'égout et des eaux courantes, par *Albert Lévy*. — Sur les poussières organisées de l'atmosphère (8e Mémoire), par le Dr *Miquel*. In-18 de 450 pages, avec des figures représentant les divers organismes microscopiques rencontrés dans l'air, le sol et leurs eaux. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 2fr.

Traité d'Algèbre supérieure; par *G. Salmon*. 2e édition française, publiée d'après la 4e édition anglaise, par M. *O. Chemin*. In-8. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 9fr.

TIRAGES A PART.

Problème des n reines; par M. le général Parmentier. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1883.

La quadrica dei dodici punti e la quadrica dei dodici piani ed *Obblique e circoli osculatori alle coniche in relazione con altri elementi geometrici di cui sono casi particolari;* par M. Alfonso del Re. Extraits du *Giornale di Matematiche,* t. XXII; 1884.

Remarques sur l'effet d'une force; par M. Duroy de Bruignac. Extrait du *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils;* 1884.

Sur une généralisation du théorème de Fermat, et ses rapports avec la théorie des substitutions uniformes; par M. G. Koenigs. Extrait du *Bulletin des Sciences math. et astr.,* 2e série, t. VIII; 1884.

Studio di trasversali ed *Intorno a talune funzioni isobariche-omogenee* et *Remarques sur les fonctions holomorphes*; par M. E. Cesaro. Extrait du *Giornale di Matematiche*, t. XXII; 1884.

Bemerkungen zu den Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steinerschen Satzes und *Beiträge zur Wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie*; par M. Carl Pelz. Extraits des *Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*; 1882 et 1885.

Dimostrazione di un teorema del signor Cesaro ed *Intorno a quelle circonferenze osculatrici ad un' ellisse data per le quali la corda comune colla stessa passa per un punto dato*; par M. Carlo Maria Piuma. Extraits du *Giornale della Societa di letture e conversazioni scientifiche*; 1884 et 1885.

Modes de solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona; par M. de Jonquières. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CI; 1885.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Marzo 1884-marzo 1885.

Théorèmes relatifs à l'actinométrie des plaques mobiles; par M. Haton de la Goupillière. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. C; 1885.

Éloge de Brassinne; par M. Ch. Forestier. Extrait des *Mémoires de l'Académie de Toulouse*; 1885.

Sur les tangentes communes à un cercle et à une conique; par M. J. Neuberg. Extrait du *Journal de Mathématiques spéciales*; 1885.

La première leçon sur la théorie des équations; par M. G. de Longchamps. Extrait du *Journal de Mathématiques spéciales*; 1885.

Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe; par M. G. Darboux. Extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. I; 1885.

La conservation de l'énergie solaire; par M. Ph. Gilbert. Extrait de la *Revue des questions scientifiques;* 1885.

Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre; par M. Ph. Gilbert. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 9e année; 1885.

Alcune considerazioni sulla diname sollecitante e la torsione generata nel moto di un sistema rigido; par M. Udalrigo Masoni. Extrait des *Rendiconti della R. Accademia delle scienze fis. e mat. di Napoli;* 1885.

Alberto Castigliano ed il suo recente lavoro sulla teoria delle molle; par M. Udalrigo Masoni. Extrait du *Bollettino del Collegio degli ingegneri ed architetti in Napoli;* 1885.

Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes; par M. d'Ocagne. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XIII; 1885.

Sur une transformation polaire des courbes planes; par M. d'Ocagne. Extrait du *Jornal de Sciencias math. e astr.,* t. VI; 1885.

Excursions arithmétiques à l'infini; par M. E. Cesaro. Extraits des *Annali di Matematica,* serie IIa, t. XIII; 1885.

Intorno a taluni determinanti aritmetici e *Nuovo studio di determinanti aritmetici;* par M. E. Cesaro. Extraits des *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei;* 1885.

Considérations nouvelles sur le déterminant de

Smith et Mansion; par M. E. Cesaro. Extrait des *Annales de l'École Normale,* 3e serie, t. II; 1885.

Remarques arithmétiques; par M. E. Cesaro. Extrait du *Jornal de Sciencias math. e astr.,* t. VI; 1885.

Sull' inversione delle identità aritmetiche e *Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche* e *Determinanti in aritmetica;* par M. E. Cesaro. Extraits du *Giornale di Matematiche,* t. XXIII; 1885.

Théorie géométrique de l'hyperboloïde articulé; par M. A. Mannheim. Extraits des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CII; 1886.

ERRATUM.

3e série, t. IV. Page 151, ligne 17, *au lieu de* $A + a = A + b$, *lisez* $A + a = B + b$.

ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 12, ligne 22 (log 13219). *Au lieu de* 1986, *lisez* *1986.

AVIS.

Le mauvais état de la santé de M. Gerono ne lui permettant pas de s'occuper pour l'instant de la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* tous les articles destinés à ce journal doivent être adressés directement à M. Brisse.

SUR LA DISTRIBUTION MUTUELLE DES NOMBRES POLYGONES (SOLUTION DE LA QUESTION 1470);

Par M. E. CESARO.

1. Dans le système complet des nombres polygones des ordres μ et ν, rangés par ordre de grandeur, voyons comment les nombres d'un ordre sont distribués par rapport à ceux de l'autre ordre. Pour éviter tout malentendu, nous supposerons que l'on procède comme il suit : on range d'abord les nombres de l'ordre ν; puis, dans chaque intervalle, on range les nombres de l'ordre μ, en ayant soin, lorsqu'un de ces nombres coïncide avec un nombre de l'ordre ν, de le considérer comme appartenant à l'intervalle *qui le précède*. Ainsi, pour $\mu = 3$, $\nu = 4$, on écrira d'abord la suite croissante des *carrés*, et l'on entendra par *triangulaires* compris dans l'intervalle 25, 36, les nombres 28 et 36.

2. D'après ces conventions, pour qu'un nombre de l'ordre μ, de rang inconnu x, soit compris entre deux nombres donnés, de l'ordre ν, consécutifs, on doit avoir

$$(\nu-2)a^2-(\nu-4)a<(\mu-2)x^2-(\mu-4)x$$
$$\leqq(\nu-2)(a+1)^2-(\nu-4)(a+1),$$

d'où l'on tire

$$f(a)<x\leqq f(a+1),$$

après avoir posé, pour abréger,

$$f(a)=\frac{\mu-4+\sqrt{(\mu-4)^2+4(\mu-2)[(\nu-2)a^2-(\nu-4)a]}}{2(\mu-2)}.$$

Cela étant, si l'on considère i intervalles consécutifs,

à partir du nombre de rang a, la quotité des nombres d'ordre μ qu'ils renferment est évidemment

$$(1) \qquad N_i(a) = [f(a+i)] - [f(a)].$$

3. Afin de chercher des limites de $N_i(a)$, voyons comment se comporte la fonction $f(a+i) - f(a)$, lorsque a croît indéfiniment depuis l'unité. On reconnaît d'abord qu'elle varie toujours dans le même sens, et que ses valeurs extrêmes sont

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{-\mu + \sqrt{(\mu-4)^2 + 4(\mu-2)(i+1)[(\nu-2)i+2]}}{2(\mu-2)}, \\ B_i &= i\sqrt{\frac{\nu-2}{\mu-2}}. \end{aligned} \right.$$

Celles-ci sont donc aussi les limites cherchées. En les comparant entre elles, on trouve que la première est inférieure à la seconde lorsque

$$\mu - \nu \quad \text{et} \quad (\mu-2)(\nu-2) - 4$$

sont de même signe, c'est-à-dire dans les cas suivants :

$$\begin{array}{llll} \mu = 3, & \mu = 5, & \mu = 6, & \mu \geqq 7, \\ \nu = 4 \text{ ou } 5, & \nu = 4, & \nu = 4 \text{ ou } 5, & \nu < \mu. \end{array}$$

Il en résulte, en vertu de (1),

$$(3) \qquad A_i - 1 < N_i(a) < B_i + 1.$$

On devra écrire

$$(4) \qquad B_i - 1 < N_i(a) < A_i + 1$$

dans tous les autres cas, à savoir pour

$$\begin{array}{lll} \mu = 3, & \mu = 4, 5, 6, & \mu \geqq 4, \\ \nu \geqq 6, & \nu = 3, & \nu > \mu. \end{array}$$

4. Faisons $\mu = 3$, $\nu = 4$. Les inégalités (3) devien-

nent

$$\frac{-5+\sqrt{1+8(i+1)^2}}{2} < N_i(a) < i\sqrt{2}+1.$$

En particulier,

$$0 < \frac{\sqrt{33}-5}{2} < N_1(a) < \sqrt{2}+1 < 3.$$

Donc $N_1 = 1$ ou 2, c'est-à-dire que : *entre deux carrés consécutifs, il y a au moins un triangulaire et deux au plus*. C'est la première des propositions énoncées par Lionnet, dans la *Question* citée. La deuxième en est une conséquence naturelle. Il est évident, en effet, d'après ce qui vient d'être dit, que *deux triangulaires consécutifs comprennent entre eux un seul carré, ou bien n'en comprennent aucun*.

5. De même, pour $i = 2$, on trouve

$$1 < \frac{\sqrt{73}-5}{2} < N_2(a) < 2\sqrt{2}+1 < 4.$$

Donc $N_2 = 2$ ou 3. Il en résulte que *deux carrés de même parité, consécutifs, comprennent entre eux deux ou trois triangulaires*. L'impossibilité d'avoir $N_2 = 4$ prouve que, *si un intervalle de deux carrés consécutifs contient deux triangulaires, chacun des intervalles voisins ne peut en contenir qu'un seul*. C'est en cela que consiste la dernière proposition de Lionnet.

6. Donnons une seule application des inégalités (4), en faisant $\mu = 4$. On obtient

$$i\sqrt{\frac{\nu-2}{2}}-1 < N_i(a) < \sqrt{\frac{(i+1)[(\nu-2)i+2]}{2}}.$$

Par exemple, pour $i = 2$, $\nu = 3$, on trouve

$$0 < \sqrt{2}-1 < N_2(a) < \sqrt{6} < 3.$$

Il en résulte que *deux triangulaires de même parité, consécutifs, comprennent entre eux au moins un carré, et deux au plus.*

7. Les expressions (2) montrent que, si l'on fait croître i indéfiniment, on a

$$\lim \frac{A_i}{i} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\mu - 2}} = \frac{B_i}{i}.$$

Conséquemment, en vertu des inégalités (3) et (4), on peut affirmer que l'on a, *dans tous les cas*,

$$\lim \frac{N_i(a)}{i} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\mu - 2}}.$$

Remarquons, en passant, que ce résultat est indépendant de a. Cela tient à ce que les deux ordres conservent, l'un par rapport à l'autre, une fréquence constante.

8. Si μ et ν sont tels que, dans chaque intervalle, il ne puisse exister qu'un ou deux nombres de l'ordre μ, on aura, en désignant respectivement par α et β les nombres des intervalles qui se trouvent dans l'une ou l'autre de ces conditions,

$$\alpha + \beta = i, \qquad \alpha + 2\beta = N_i.$$

La probabilité que le second cas se produise est donc

$$\lim \frac{\beta}{i} = \lim \frac{N_i - i}{i} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\mu - 2}} - 1.$$

En particulier, dans la question traitée par Lionnet, ce résultat devient

$$\sqrt{2} - 1 = 0,414213\ldots.$$

Conséquemment : *Il y a seulement* 70 *à parier contre* 99 *environ que deux carrés consécutifs com-*

prennent, entre eux, deux triangulaires, plutôt qu'un seul. Au contraire, si l'on fait $\mu = 4$, $\nu = 3$, on trouve qu'*il y a 70 environ à parier contre 29 que deux triangulaires consécutifs comprennent entre eux un carré.* La valeur exacte de la probabilité est

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707106\ldots.$$

9. Soit $Q(n)$ la quotité des nombres de l'ordre μ, non supérieurs à n. On doit avoir

$$\frac{(\mu-2)Q^2-(\mu-4)Q}{2} = n < \frac{(\mu-2)(Q+1)^2-(\mu-4)(Q+1)}{2};$$

d'où l'on tire

$$Q(n) = \left[\frac{\mu-4+\sqrt{(\mu-4)^2+8(\mu-2)n}}{2(\mu-2)}\right].$$

Asymptotiquement,

$$Q(n) = \sqrt{\frac{2}{\mu-2}}\, n^{\frac{1}{2}}.$$

Cela étant, imaginons que l'on ait mis dans une urne tous les nombres des ordres μ et ν, et que l'on en tire un, au hasard. La probabilité qu'il soit de l'ordre μ est

$$\frac{\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\mu-2}+\sqrt{\nu-2}}.$$

Par exemple : *Il y a environ 97 à parier contre 56 qu'un nombre est triangulaire plutôt que pentagonal.* La valeur exacte de la probabilité est

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0,633974\ldots.$$

Note. — La question 1470 a aussi été résolue par MM. Goffart et Moret-Blanc.

ÉTUDE SUR LES SECTIONS PLANES DES SURFACES. THÉORIE NOUVELLE DES PLANS CYCLIQUES ET DES OMBILICS [SUITE (1)];

PAR M. VICTOR LAC DE BOSREDON,
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique d'Angers.

II. — SURFACES DÉPOURVUES DE CENTRE.

Les formules (3) conduisent aussi facilement aux sections circulaires des paraboloïdes.

Ces surfaces sont représentées par l'équation générale

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

Si l'on remplace dans cette équation x, y, z par leurs valeurs tirées des formules (3), il vient

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{B^2}{a^2} \pm \frac{A^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{2ABC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2}\right) xy \\ &\qquad + \frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2} \left(\frac{A^2}{a^2} \pm \frac{B^2}{b^2}\right) y^2 \\ &\qquad = \frac{2(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}}{c\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\, y. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette section soit un cercle, il faut d'abord, comme pour les surfaces à centre, que l'on ait

$$ABC = 0,$$

c'est-à-dire que l'un des coefficients A, B, C doit être nul. Il en résulte que tout plan cyclique doit passer par l'un des trois axes coordonnés, c'est-à-dire par l'axe de

(1) *Voir* même Tome, p. 186.

la surface ou l'une des normales aux deux plans principaux.

Puisque le plan sécant doit passer par l'un des trois axes coordonnés, nous pouvons encore faire usage des formules réduites (4), (5) et (6).

Paraboloïde elliptique.

Considérons d'abord le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c},$$

et supposons $A = 0$. Il faudra appliquer les formules (4). En substituant dans l'équation de la surface, à la place des variables, leurs valeurs tirées de ces formules, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{C^2 y^2}{b^2(B^2 + C^2)} = \frac{2By}{c\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{a^2} = \frac{C^2}{b^2(B^2 + C^2)}$$

ou

(12) $$B^2 b^2 = C^2(a^2 - b^2),$$

ce qui exige

$$a > b.$$

Alors le plan sécant

$$By + Cz = 0$$

passe par la normale à la section principale qui se trouve dans le plan zy.

Or les sections principales sont les deux paraboles

$$x^2 = \frac{2a^2}{c} z, \qquad y^2 = \frac{2b^2}{c} z.$$

dont les paramètres ont respectivement pour valeurs $\frac{a^2}{c}$ et $\frac{b^2}{c}$. La section principale du plan zy est donc celle de moindre paramètre. Ainsi, dans le paraboloïde elliptique, on obtient des sections circulaires, en coupant la surface par des plans perpendiculaires à la section principale de moindre paramètre.

Si dans l'équation du plan sécant on remplace C par sa valeur tirée de l'équation (12), il vient

$$y\sqrt{a^2 - b^2} \pm bz = 0.$$

Il existe donc deux plans cycliques également inclinés sur le plan déterminé par l'axe de la surface et la normale à la section principale de moindre paramètre.

L'équation de la section dans son plan est

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{2By}{c\sqrt{B^2 + C^2}},$$

ou, en remplaçant le rapport $\frac{B}{C}$ par sa valeur tirée de l'équation (12),

$$x^2 + y^2 = \pm \frac{2ay}{c}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Voyons si l'on peut obtenir une section circulaire en menant le plan sécant par l'axe de la surface. Il faut alors faire $C = 0$ et appliquer les formules (6).

On trouve alors pour la section

$$\frac{B^2 x^2}{a^2(A^2 + B^2)} + \frac{A^2 x^2}{b^2(A^2 + B^2)} = \frac{2y}{c},$$

équation d'une parabole.

Par conséquent, en coupant un paraboloïde elliptique par un plan conduit suivant l'axe de la surface, on obtient toujours des paraboles et jamais des cercles.

Paraboloïde hyperbolique.

Passons enfin au paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

On déduira ce cas du précédent, en changeant b^2 en $-b^2$ dans la relation (12), qui devient alors

$$-B^2 b^2 = C^2(a^2 + b^2).$$

Cette condition ne peut jamais être remplie. On ne peut donc pas obtenir une section circulaire au moyen d'un plan mené par l'axe des x. Il en sera de même évidemment pour l'axe des y.

Menons un plan par l'axe des z, c'est-à-dire, par l'axe de la surface. Il faut supposer $C = 0$ et employer les formules (6). On trouve ainsi

$$\frac{B^2 x^2}{a^2(A^2 + B^2)} - \frac{A^2 x^2}{b^2(A^2 + B^2)} = \frac{2y}{c},$$

équation d'une parabole, à moins que l'on n'ait

$$\frac{B^2}{a^2} - \frac{A^2}{b^2} = 0,$$

auquel cas l'équation précédente se réduit à $y = 0$, et la section se réduit à une droite confondue avec l'axe des x. Alors la section est rectiligne et dans aucun cas elle n'est circulaire. Il n'existe donc pas de plan cyclique dans le paraboloïde hyperbolique.

Dans le cas où l'on a

$$\frac{B^2}{a^2} - \frac{A^2}{a^2} = 0.$$

si l'on remplace B par sa valeur tirée de cette relation dans l'équation

$$Ax + By = 0$$

du plan sécant, on trouve

$$bx \pm ay = 0.$$

Il existe donc deux plans passant par l'axe, qui coupent la surface suivant une droite. Ces plans sont également inclinés sur chacun des plans principaux. Puisque la section a pour équation $y = 0$, c'est une droite se confondant avec l'axe des x situé dans son plan, c'est-à-dire se confondant avec la trace du plan sécant sur le plan xy. Les deux droites de sections sont par conséquent représentées dans l'espace par les équations

$$z = 0, \qquad \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

C'est en effet ce que l'on trouve lorsque dans l'équation de la surface on fait $z = 0$: cette équation se réduit à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, et elle se décompose en deux

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Ainsi toutes les surfaces du second ordre admettent des plans cycliques, excepté le paraboloïde hyperbolique. On peut même supprimer cette exception, si l'on considère les sections rectilignes que l'on obtient dans ce cas comme des cercles d'un rayon infini.

III. — *Cône oblique à base circulaire.*

Étudions encore les plans cycliques du cône oblique à base circulaire.

Si l'on prend le plan du cercle de base pour plan

des xy), le centre de ce cercle pour origine des coordonnées, et si l'on fait passer le plan zx par le sommet, le cône aura pour équation en coordonnées rectangulaires

$$(az - cx)^2 + c^2y^2 = r^2(z - c)^2$$

ou

$$(13)\quad (a^2 - r^2)z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 - 2acxz + 2r^2cz = r^2c^2,$$

en désignant par a et c les coordonnées du sommet.

Si l'on substitue dans cette équation les valeurs de x, y, z tirées des formules (3), on trouve, pour le coefficient du terme en xy,

$$\frac{2Bac}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Pour que le plan $Ax + By + Cz = 0$ soit un plan cyclique, il faut donc, en premier lieu, que l'on ait

$$B = 0.$$

Ainsi le plan sécant doit passer par l'axe des y.

En faisant cette hypothèse et appliquant les formules (5), on trouve

$$\frac{(a^2 - r^2)A^2y^2}{A^2 + C^2} + \frac{C^2c^2y^2}{A^2 + C^2} + c^2x^2 + \frac{2ACacy^2}{A^2 + C^2} + \frac{2Acr^2y}{\sqrt{A^2 + C^2}} = r^2c^2.$$

Pour que la section soit circulaire, on doit donc avoir en second lieu

$$(a^2 - r^2)A^2 + C^2c^2 + 2ACac = c^2(A^2 + C^2)$$

ou bien

$$A[A(a^2 - r^2 - c^2) + 2Cac] = 0.$$

On satisfera à cette équation en posant soit

$$A = 0,$$

soit

$$A(a^2 - r^2 - c^2) + 2Cac = 0.$$

Dans le premier cas l'équation du plan sécant se réduit à $z = 0$. Donc le plan xy est un plan cyclique, et il en est de même, par conséquent, de tout plan parallèle au plan xy : le résultat était évident *a priori*.

Dans le second cas, on a

$$\frac{A}{C} = -\frac{2ae}{a^2 - r^2 - c^2};$$

par suite, l'équation du plan sécant se réduit à

(14) $$(a^2 - r^2 - c^2)z - 2acx = 0.$$

Ainsi il existe dans le cône oblique à base circulaire deux séries de plans cycliques. La première se compose de plans parallèles au plan xy; la seconde de plans parallèles au plan représenté par l'équation (14).

Cherchons les angles que fait la trace de ce dernier plan sur le plan xz avec les génératrices du cône.

On obtiendra les équations de ces génératrices, en faisant $y = 0$ dans l'équation du cône. On trouve ainsi

$$az - cx = \pm r(z - c).$$

Il en résulte

$$az - cx = r(z - c)$$

pour la première génératrice, et

$$az - cx = -r(z - c)$$

pour la seconde. Si l'on désigne par α et α' les angles qu'elles font avec l'axe des x, on a donc

$$\tang \alpha = \frac{c}{a - r}, \qquad \tang \alpha' = \frac{c}{a + r}.$$

D'un autre côté, l'angle δ que fait la trace du plan sé-

cant avec l'axe des x est donné par la relation

$$\tang \delta = \frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2};$$

mais

$$\frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2} = \frac{\dfrac{c}{a-r} + \dfrac{c}{a+r}}{1 - \dfrac{c}{a-r}\,\dfrac{c}{a+r}}.$$

Il en résulte

$$\tang \delta = \tang(\alpha + \alpha'),$$

d'où

$$\delta = \alpha + \alpha'.$$

Par conséquent la trace du plan sécant est antiparallèle à l'une ou l'autre des génératrices que l'on considère. Ce plan est donc le plan antiparallèle du cône oblique à base circulaire.

Ombilics des surfaces du second ordre.

Il est très facile, au moyen des résultats précédents, de déterminer les ombilics des surfaces du second ordre. Nous nous bornerons au cas de l'ellipsoïde; le calcul serait le même pour les autres surfaces.

On sait que les ombilics sont les points de contact des plans tangents parallèles aux sections circulaires.

Dans l'ellipsoïde les plans cycliques ont pour équation, comme nous l'avons vu,

$$cx\sqrt{a^2 - b^2} \pm az\sqrt{b^2 - c^2} = 0.$$

Or le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x, y, z) est représenté par l'équation

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1$$

Pour qu'il soit parallèle aux plans cycliques, il faut

que l'on ait

$$\frac{a^2 c\sqrt{a^2-b^2}}{x} = \pm\frac{c^2 a\sqrt{b^2-c^2}}{z} = \frac{0}{y}.$$

Il en résulte d'abord

$$y = 0,$$

puis

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}.$$

Puisque le point (x, y, z) se trouve sur l'ellipsoïde, on a aussi, à cause de $y = 0$,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},$$

et par suite

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

Ainsi les coordonnées des ombilics réels de l'ellipsoïde sont déterminées par les équations

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \qquad \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

Application à la résolution des problèmes.

Voyons enfin comment les formules (3) peuvent servir à la résolution des problèmes. Supposons qu'on ait à résoudre la question suivante :

Chercher le lieu de la droite d'intersection de deux plans rectangulaires menés par deux droites données, et déterminer les sections faites par des plans perpendiculaires à chacune de ces droites.

Si l'on prend l'une des droites pour axe des x, la

perpendiculaire commune aux deux droites pour axe des y, et pour axe des z la perpendiculaire au plan xy menée par le point de rencontre de l'axe des x, avec la perpendiculaire commune, on trouve aisément que le lieu est représenté par l'équation

$$y^2 + z^2 - mxz - ay = 0,$$

a désignant la longueur de la perpendiculaire commune, et m le coefficient angulaire de la projection de la seconde droite sur le plan zx.

Pour obtenir les sections perpendiculaires à la première droite, il suffit de faire dans l'équation du lieu $x = K$, et l'on trouve immédiatement que ces sections sont des cercles, puisqu'ils se projettent en vraie grandeur sur le plan zy.

Un plan perpendiculaire à la seconde droite, mené par l'origine, a pour équation

$$x + mz = 0.$$

Il passe par l'axe des y. Pour avoir l'équation de la section faite par ce plan, il suffit donc d'appliquer les formules (5). Elles deviennent ici

$$x = -\frac{my'}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad y = x', \qquad z = \frac{y'}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation de la surface, on trouve

$$x'^2 + \frac{y'^2}{1+m^2} + \frac{m^2y'^2}{1+m^2} - ax' = 0$$

ou bien

$$x'^2 + y'^2 - ax' = 0,$$

équation d'un cercle.

Il en résulte que tous les plans menés perpendiculairement à l'une ou à l'autre des droites données sont des plans cycliques.

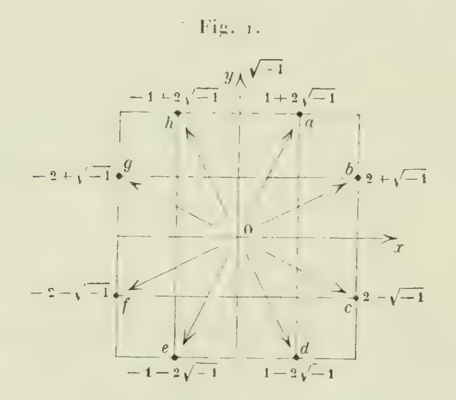
SUR LA MARCHE DU CAVALIER;

PAR M. FRITZ HOFMANN.

THÉORÈME. — *Dans un échiquier de n^2 cases* (n *nombre* impair $= 2m + 1$), *comme par exemple dans un échiquier de* 49, 81 *cases, la marche du cavalier ne peut pas être fermée; c'est-à-dire que le cavalier ne peut pas revenir à son point de départ après avoir touché une fois toutes les cases de l'échiquier.*

Démonstration. — On peut mener par un centre d'origine O (*fig.* 1) des droites parallèles à tout mou-

Fig. 1.



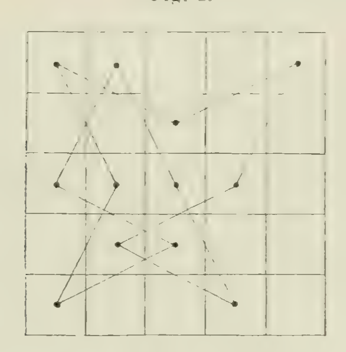
vement du cavalier. Il y a huit espèces de ces droites, différentes en direction, qui aboutissent toutes aux points qui ont pour coordonnées $\pm 1 \pm 2\sqrt{-1}$ ou $\pm 2 \pm \sqrt{-1}$, en donnant au plan de la figure la signification du plan des nombres réels et imaginaires.

Quand le cavalier décrit une courbe quelconque sur

l'échiquier pour atteindre un point $\mathcal{A}$, on aura les coordonnées du point $\mathcal{A}$ en formant la *somme* des droites qu'on a menées successivement parallèles à ses mouvements par le point O, après avoir superposé la *fig.* 1 sur l'échiquier, de sorte que le point de départ du cavalier ait les cordonnées $0, 0\sqrt{-1}$ de l'origine O.

Quand la courbe décrite par le cavalier est *fermée* (*fig.* 2), on conclura que la somme des droites par O qui représentent ses mouvements est égale à $0 + 0\sqrt{-1}$.

Fig. 2.



Or supposons que le cavalier revienne à sa case primitive après avoir touché toutes les cases (après avoir fait $2m+1$ mouvements). On donnera aux huit points $\pm 1 \pm 2\sqrt{-1}$, $\pm 2 \pm \sqrt{-1}$ de la figure des indices qui nous signalent le nombre de fois qu'un mouvement dans une certaine direction a été exécuté :

$$a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f, \ g, \ h.$$

Nous aurions d'abord

(I) $a + b + c + d + e + f + g + h =$ nombre impair.

En même temps (*fig.* 1)

(II) $a + 2b + 2c + d - e - 2f - 2g - h = 0.$

(III) $2a + b - c - d - 2e - f - g + 2h = 0;$

en égalant à zéro les deux parties, réelle et imaginaire, de la somme des droites menées par O.

Mais on peut démontrer que les deux équations (II) et (III) ne sauraient coexister avec (I).

Car on tire de (II), après avoir supprimé

$$2(b - c - f - g),$$

$$a - d - (e + h) = \text{nombre pair};$$

de même

$$b - g - (c - f) = \text{nombre pair},$$

après avoir supprimé

$$2(a - d - e - h)$$

dans (III).

Il s'ensuit que

$$a - d - e + h = \text{nombre pair}$$

et

$$b - g - c - f = \text{nombre pair};$$

$$a - b - c - d - e - f - g - h = \text{nombre pair}.$$

Donc, toutes les fois que la marche du cavalier est fermée, le nombre de ses mouvements a été *pair*.

C. Q. F. D.

APPLICATIONS DES FORMULES GÉNÉRALES QUI DONNENT LA SOLUTION COMPLÈTE, EN NOMBRES ENTIERS, DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE DU SECOND DEGRÉ CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE D'INCONNUES (¹);

PAR M. DESBOVES.

Si l'on représente par $F(X, Y, Z, U, \ldots) = 0$ l'équation proposée, que l'on désigne par $(x, y, z, u, \ldots)$ une

(¹) *Voir* l'article publié, 3ᵉ série, t. III; 1884.

solution quelconque de cette équation, puis que l'on pose

$$N = F(r, p, q, s, \ldots),$$

$$M = \frac{dN}{dr}x + \frac{dN}{dp}y + \frac{dN}{dq}z + \frac{dN}{ds}u + \ldots,$$

on a, comme il a été démontré, la solution complète, en nombres entiers, de l'équation proposée, par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= Mr - Nx,\\ Y &= Mp - Ny,\\ Z &= Mq - Nz,\\ U &= Ms - Nu,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On peut d'ailleurs simplifier ces formules, sans les rendre moins générales, en faisant nulle l'une des variables r, p, q, s, ..., r par exemple, dans M, N et les formules (1). Si l'on désigne par M_1, N_1 ce que deviennent M, N quand on y fait $r = 0$, on aura les nouvelles formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -N_1 x,\\ Y &= M_1 p - N_1 y,\\ Z &= M_1 q - N_1 z,\\ U &= M_1 s - N_1 u,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Des valeurs de p, q, s, ..., qui correspondent à une solution connue (X, Y, Z, U, ...), peuvent d'ailleurs s'obtenir par les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= xY - yX,\\ q &= xZ - zX,\\ s &= xU - uX,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Problème I. — *Étant donnée l'équation*

$$(4)\qquad X^2 + bY^2 + dXY = Z^2,$$

trouver des formules qui en donnent la solution complète en nombres entiers.

On a dans ce cas

$$(5)\qquad N_1 = bp^2 - q^2,\qquad M_1 = dpx + 2bpy - 2qz.$$

Or l'équation (4) est évidemment satisfaite en prenant $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$. On a donc

$$M_1 = dp + 2q,$$

et alors les formules (2) donnent

$$(6)\qquad \begin{cases} X = q^2 - bp^2, \\ Y = dp^2 + 2pq, \\ Z = q^2 + bp^2 - dpq. \end{cases}$$

Ces formules, à la notation près, sont identiques aux formules (5) et (7) du Mémoire sur la résolution de l'équation

$$aX^m + bY^m = cZ^n \text{ (}^1\text{)}.$$

Seulement, dans le Mémoire cité, on n'avait pas démontré que les formules (5) et (7) donnaient la solution complète, en nombres entiers, de l'équation (4). C'est du reste ce qu'on aurait vu directement en prenant $p = X + Z$, $q = Y$.

Remarque. — On satisfait encore à l'équation (4) en prenant $x = b$, $y = -d$, $z = b$. Alors on obtient les formules suivantes, un peu moins simples que les formules (6),

$$(7)\qquad \begin{cases} X = (q^2 - bp^2)b, \\ Y = dq^2 + 2bpq, \\ Z = (q^2 + bp^2 + dpq)b. \end{cases}$$

Problème II. — *Trouver la solution complète, en*

---

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII; 1879.

nombres entiers, de l'équation

$$(8)\qquad X^2 + Y^2 = cZ^2,$$

lorsque c est égal à 1 *ou à la somme des carrés de deux nombres entiers m et n* (¹).

On a

$$N_1 = p^2 - cq^2, \qquad M_1 = 2py - 2cqz.$$

Si l'on suppose d'abord $c = 1$, on peut prendre $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$; alors on a

$$N_1 = p^2 - q^2, \qquad M_1 = 2q,$$

et les formules générales donnent

$$X = p^2 - q^2, \qquad Y = 2pq, \qquad Z = p^2 + q^2.$$

Remarque. — Si c était égal à un carré m^2, on remplacerait cZ^2 par $(mZ)^2$, et l'on serait ramené au cas précédent.

Supposons maintenant que l'on ait $c = m^2 + n^2$, alors on prendra $x = m$, $y = n$, $z = 1$ et, par suite, on aura

$$M_1 = 2pn - 2cq.$$

En employant les formules générales, on a donc

$$(9)\qquad \begin{cases} X = (cq^2 - p^2)m, \\ Y = p^2 n - 2cpq + cnq^2, \\ Z = p^2 - 2npq + cq^2. \end{cases}$$

Remarque. — Pour obtenir toutes les valeurs de X, Y, Z, en grandeur et en signe, on devra mettre les signes + et — devant les seconds membres des formules précédentes. Il en est de même pour les for-

(¹) D'après un théorème de Legendre, les deux cas considérés sont les seuls dans lesquels l'équation (8) peut être résolue.

mules (6). Seulement alors il faut prendre ensemble les deux signes + ou les deux signes — devant les seconds membres des deux premières formules.

Soit, comme exemple numérique, l'équation

$$(10) \qquad X^2 - Y^2 = 10Z^2.$$

Le nombre 10 étant égal à $3^2 + 1^2$, on a une première solution (3, 1, 1). Alors les formules (9) deviennent

$$\begin{aligned} X &= 3(10q^2 - p^2), \\ Y &= p^2 - 20pq - 10q^2, \\ Z &= p^2 - 2pq + 2q^2. \end{aligned}$$

Faisons-y, par exemple, $p = 1$, $q - 1$, on obtient la solution (27, 31, 13). Si l'on avait fait $p = 1$, $q = 1$, on aurait retrouvé la solution initiale (3, 1, 1).

Problème III. — *Trouver la solution complète de l'équation*

$$(11) \qquad aX^2 - bY^2 + dXY = cZ^2,$$

lorsqu'on a

$$(12) \qquad c = a + b + d.$$

Il suffit de faire $x = y = z = 1$ et de changer c en $-c$ dans les formules (3) de l'article déjà cité. On a ainsi

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= -bp^2 + cq^2, \\ Y &= (b + d)p^2 + cq^2 - 2cpq, \\ Z &= -bp^2 - cq^2 - (d + 2b)pq. \end{aligned} \right.$$

La remarque relative aux signes des seconds membres qui a été faite à la suite du problème précédent est encore ici applicable.

On peut remplacer les formules (13) par des formules qui s'en déduisent, en y changeant p en $-cp$. La généralité des formules n'en est pas d'ailleurs dimi-

nuée, puisque si, dans les nouvelles formules, on remplace q par $-cq$, on a les mêmes valeurs de X, Y, Z, abstraction faite des facteurs communs, qu'en prenant p et q dans les formules (13). Les nouvelles formules nous seront très utiles dans la résolution des équations biquadratiques.

On a d'abord, en divisant par c les seconds membres des équations (13), après y avoir changé p en $-cp$,

$$X = q^2 - bcp^2,$$
$$Y = (b + d)cp^2 + q^2 + 2cpq,$$
$$Z = -bcp^2 - q^2 - (2b + d)pq;$$

puis, si l'on complète les carrés de $q + cp$ et $q + bp$ et qu'on remplace $b + d - c$, $c - b$ respectivement par $-a$, $a + d$, il vient, en tenant compte des signes,

$$(14) \quad \begin{cases} X = \mp(q^2 - bcp^2), \\ Y = \pm[(q + cp)^2 - acp^2], \\ Z = -[(q + bp)^2 + b(a - d)p^2 + dpq], \end{cases}$$

les signes supérieurs étant pris ensemble ainsi que les signes inférieurs dans les deux premières formules.

Problème IV. — *Trouver la solution complète, en nombres entiers, de l'équation*

$$(15) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = U^2 \text{ [1]}.$$

On obtient

$$N_1 = p^2 + q^2 - s^2, \qquad M_1 = 2px - 2qz - 2su,$$

et si l'on prend $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$, $u = 3$, on a

$$M_1 = 2(2p - q - 3s).$$

---

[1] Voir les *Nouvelles Annales*, p. 111 et 501; 1874.

Les formules (2) donnent alors

$$\begin{aligned} X &= -2(p^2+q^2-s^2), \\ Y &= 2p(2p+q-3s)-2(p^2+q^2-s^2), \\ Z &= 2q(2p+q-3s)-(p^2+q^2-s^2), \\ U &= 2s(2p+q-3s)-3(p^2+q^2-s^2). \end{aligned}$$

Si maintenant on effectue les calculs indiqués, on voit qu'on a la solution complète du problème proposé au moyen de l'identité

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &[2(p^2+q^2-s^2)]^2+\{2[(p-s)^2-q^2+p(q-s)]\}^2 \\ &\qquad\qquad +[(q-s)^2-p^2+4q(p-s)]^2 \\ &= \{3[(p-s)^2+q^2]+2s(p-q)\}^2. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs par les formules (3)

$$(17)\quad p=2(Y-X), \qquad q=2Z-X, \qquad s=U-3X,$$

(X, Y, Z, U) représentant une solution donnée dans laquelle X, Y, Z, U ont les signes $\pm$. Veut-on, par exemple, retrouver la solution initiale $(2, 2, 1, 3)$, on ne prendra pas tous les nombres $2, 2, 1, 3$ avec le signe $+$, car on trouverait la solution illusoire $(0, 0, 0, 0)$. Mais, si l'on prend $X=-2$, $Y=2$, $Z=1$, $U=3$, on reproduira la solution donnée en faisant $p=2$, $q=1$, $s=3$. Soit maintenant la solution $(2, 3, 6, 7)$, on aura

$$p=1, \quad q=5, \quad s=4 \quad \text{ou} \quad p=5, \quad q=7, \quad s=10, \quad \ldots.$$

On trouvera d'une manière semblable les valeurs de p, q, s correspondant aux solutions $(23, 14, 2, 27)$, $(53, 34, 2, 63)$, $(36, 200, 27, 205)$, ..., auxquelles M. Catalan est arrivé de différentes manières.

Généralisation. — On peut se proposer plus généralement de trouver toutes les solutions de l'équation

$$X^2+Y^2+Z^2+\ldots=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)U^2.$$

le nombre des inconnues dans le premier membre étant quelconque et α, β, γ, ... étant des nombres entiers donnés en même nombre que ces inconnues. On partira alors de la solution initiale (α, β, γ, ..., 1) et l'on appliquera les formules (2).

SUR LES COURBES DANS LESQUELLES LA PROJECTION DU RAYON DE COURBURE SUR LE RAYON VECTEUR EST AVEC LUI DANS UN RAPPORT CONSTANT;

Par M. M. du CHATENET.

Soit m le rapport constant du rayon vecteur r passant par un point fixe à la projection du rayon de courbure ρ sur le même rayon vecteur. L'angle θ de la normale avec le rayon vecteur sera l'angle de projection et la propriété caractéristique des courbes que nous examinons sera exprimée par la relation

$$r = m\rho\cos\theta.$$

Or on a, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r\frac{dr^2}{d\omega^2} + 2\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}, \qquad \cos\theta = \frac{r}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

En portant ces valeurs dans la formule précédente, nous aurons l'équation différentielle des courbes jouissant de la propriété indiquée

$$(1) \qquad r\frac{d^2 r}{d\omega^2} + (m-2)\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - (m-1)r^2 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$(2)\qquad \frac{\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{d\omega^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2} + m - 1 = 0.$$

Le numérateur de la fraction n'étant autre chose que la dérivée $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}$, l'intégration donnera

$$(3)\qquad \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega} + (m-1)\omega = 0$$

en supprimant la constante, ce qui, dans le cas actuel, ne nuit pas à la généralité de la question : il suffira en effet de donner à l'axe polaire une direction convenable. On aura donc

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega} + \operatorname{tang}(m-1)\omega = 0.$$

Cette équation est facile à intégrer et donne

$$(4)\qquad r^{m-1} = a^{m-1}\cos(m-1)\omega.$$

C'est l'équation générale des courbes dont nous avons parlé.

D'après (3), on voit que l'angle θ de la normale avec le rayon vecteur est égal, en valeur absolue, à $m-1$ fois l'angle de ce rayon vecteur avec une direction déterminée. On en déduit immédiatement que la normale à la courbe et le rayon vecteur font avec cette même direction des angles qui sont entre eux dans un rapport constant égal à m.

Le rayon de courbure aura pour expression

$$\frac{r}{m\cos(m-1)\omega};$$

en remplaçant ω par sa valeur tirée de (4), nous aurons

$$(5) \qquad \rho = \frac{a^{m-1}}{m r^{m-2}}.$$

Il est une solution de la question qui n'est pas contenue dans la formule générale (4). L'équation (2) sera en effet vérifiée si l'on a en même temps

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2 r}{d\omega^2} - \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{dr}{d\omega}\right)^2 = 0, \\ m = 1. \end{cases}$$

L'intégration donne $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega} = n$; d'où l'on voit que l'angle de la tangente avec le rayon vecteur sera constant. Une seconde intégration donnera

$$r = a e^{n\omega},$$

équation qui représente la spirale logarithmique. On connaît les deux propriétés caractéristiques de cette courbe : l'angle de la tangente et du rayon vecteur est constant et le rayon vecteur est égal à la projection du rayon de courbure sur lui.

Nous pouvons de la formule générale (4) tirer quelques applications particulières en donnant différentes valeurs à m.

1° $m = 2$. — Dans ce cas l'équation (4) donne

$$r = a \cos\omega.$$

La courbe est alors un cercle et les propriétés des angles et du rayon vecteur sont évidentes par elles-mêmes.

2° $m = 3$. — La courbe qui correspond à ce cas a pour équation

$$r = a\sqrt{\cos 2\omega}.$$

C'est la lemniscate de Bernoulli.

Pour construire la normale en un point de la lemniscate, on tracera le rayon vecteur du centre de la courbe et l'on mènera une droite faisant avec lui un angle double de celui qu'il fait avec l'axe.

Le rayon de courbure sera égal au tiers du segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée du centre sur le rayon vecteur. Il sera égal à $\frac{a^2}{3r}$, c'est-à-dire inversement proportionnel au rayon vecteur.

3° $m = \frac{1}{2}$. — La courbe correspondante a pour équation

$$r = \frac{2a}{1 + \cos\omega}.$$

C'est une parabole rapportée à son foyer et à son axe.

La normale à la parabole fait avec le rayon vecteur du foyer un angle égal à la moitié de celui du rayon vecteur et de l'axe.

Le rayon de courbure est égal au double du segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée du foyer sur le rayon vecteur. Il a pour expression $\sqrt{\frac{2r^3}{a}}$.

4° $m = \frac{3}{2}$. — La courbe fournie par cette valeur de m a pour équation

$$r = \frac{a}{2}(1 + \cos\omega).$$

C'est une épicycloïde engendrée par un cercle de diamètre $\frac{a}{2}$.

La normale à l'épicycloïde s'obtiendra en faisant avec le rayon vecteur du point de rebroussement un angle égal à la moitié de celui du rayon vecteur et de la droite joignant le point de rebroussement au sommet de la courbe.

Le rayon de courbure est égal à une fois et demie le segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée au point de rebroussement sur le rayon vecteur. Il aura pour expression $\frac{2}{3}\sqrt{ar}$.

5° $m = -1$. — La courbe qui correspond à ce cas a pour équation

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\omega}} \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

C'est une hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

Dans l'hyperbole équilatère, la normale fait avec le rayon vecteur du centre un angle égal au double de celui qu'il fait avec l'axe.

Le rayon de courbure est égal au segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée au centre sur le rayon vecteur. Il sera égal à $\frac{r^3}{a^2}$.

SUR LES CENTRES DE COURBURE DE L'ELLIPSE ET DE LA PARABOLE;

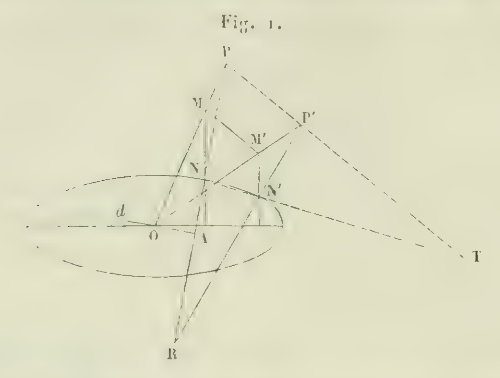
Par M. René GODEFROY,
Élève de l'École Polytechnique.

Centre de courbure de l'ellipse. — Soit une ellipse de centre O, de demi-axes a et b. La solution repose sur ce fait que la normale en un point N de l'ellipse rencontre le rayon correspondant OM du cercle circonscrit à l'ellipse en un point P appartenant au cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $a + b$. Menons une normale voisine de celle-ci à laquelle correspondent les

points N', M', P'. Elle coupe la première au point R. Les droites NN', PP' se coupent au point T.

Soient R le rayon de courbure en N, d le diamètre conjugué de ON, $NA = h$ sa distance au point N.

Fig. 1.



Le triangle PNT, coupé par la normale P'N', donne lieu à la relation

$$\frac{NR}{PR} = \frac{NN'}{PP'}\,\frac{TP'}{TN'}.$$

Quand P'R viendra en coïncidence avec PR, on aura

$$\lim\frac{NN'}{PP'} = \lim\frac{NN'}{MM'} \times \lim\frac{MM'}{PP'} = \frac{d}{a} \times \frac{a}{a+b} = \frac{d}{a+b},$$

$$\lim\frac{TP'}{TN'} = \lim\frac{TP}{TN} = \frac{PO}{PA} = \frac{a+b}{d+h}.$$

car $PN = d$.

Remplaçons dans la première relation $\frac{NR}{PR}$ par $\frac{R}{d+R}$, et le deuxième membre par les valeurs trouvées : il vient

$$\frac{R}{d+R} = \frac{d}{d+h}.$$

$$R = \frac{d^2}{h};$$

c'est la formule connue de Dupin.

On peut opérer un peu différemment au moyen d'un artifice que nous utiliserons encore.

Les diamètres des cercles circonscrits aux triangles NRN', PRN' sont entre eux comme les bases NN', PP' de ces triangles. Le premier a pour limite le rayon de courbure en N, le second le diamètre du cercle passant au centre de courbure et tangent en P au cercle $a+b$, lequel a pour valeur $\frac{(a+b)(R+d)}{d+h}$.

On a donc

$$\frac{R}{\frac{(a+b)(R+d)}{d+h}} = \frac{d}{a+b}$$

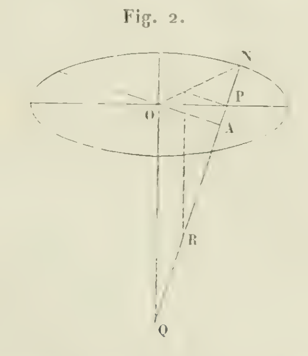
ou

$$\frac{R}{d+R} = \frac{d}{d+h},$$

$$R = \frac{d^2}{h}.$$

On peut passer de cette formule à une construction

Fig. 2.



géométrique connue, ou l'établir au moyen de cette construction.

Soient P, Q les points d'intersection de la normale en N avec les axes : d étant le demi-diamètre perpendiculaire, on a

$$NP.NQ = d^2.$$

On voit de suite sur la figure que

$$\frac{\mathrm{NP}}{d} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{\mathrm{NQ}}{d} = \frac{a}{b},$$

d'où

$$\mathrm{NP}.\mathrm{NQ} = d^2.$$

Menons par P une perpendiculaire à NPQ jusqu'en NO et du point de rencontre une perpendiculaire au grand axe jusqu'en R sur NPQ, on a

$$\mathrm{R} = \frac{d^2}{h} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NA}} \cdot \mathrm{NQ} = \frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{NQ}} \cdot \mathrm{NQ} = \mathrm{NR},$$

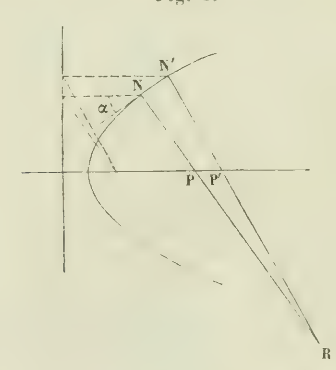
ce qui justifie la construction.

Les solutions précédentes, en raison même de la propriété dont elles dérivent, ne sont pas applicables aux deux autres sections coniques.

L'usage du principe que nous venons d'indiquer donne facilement le centre de courbure de la parabole.

Centre de courbure de la parabole. — Soient N, N' deux points de la courbe. Les normales en ces points se

Fig. 3.



rencontrent en R et coupent l'axe aux points P, P'. Soient R le rayon de courbure en N, α l'angle de la tangente avec l'axe; les cercles circonscrits aux triangles RPP',

RNN′ ont respectivement pour diamètres, à la limite, $\frac{R-N}{\cos\alpha}$ et R. Les bases sont, pour le premier triangle, la différence des rayons vecteurs des points N et N′; pour le second, cette différence divisée par $\cos\alpha$: leur rapport est $\cos\alpha$. On a donc

$$\frac{R-N}{R\cos\alpha} = \cos\alpha, \qquad R = \frac{N}{\sin^2\alpha},$$

expression connue d'où se déduit immédiatement la construction du centre de courbure de la courbe par l'intersection de la normale et de la perpendiculaire au rayon vecteur menée au point symétrique du point de la courbe par rapport au foyer.

Autre méthode pour l'ellipse. — Les normales NR, N′R en deux points voisins N, N′ sont bissectrices des angles FNF′, FN′F′ des rayons vecteurs. On a, par suite, la relation

$$\text{angle}\, NRN' = \frac{\text{angle}\, NFN'}{2} + \frac{\text{angle}\, NF'N'}{2},$$

donc

$$\frac{\lim NRN'}{NN'} = \frac{\lim \frac{NFN'}{2}}{NN'} + \frac{\lim \frac{NF'N'}{2}}{NN'}.$$

Le premier membre est l'inverse du rayon de courbure NR. Les deux rapports du deuxième membre sont les diamètres des cercles tangents en N à la conique et passant par les symétriques de N par rapport aux foyers F et F′; les rayons de ces cercles sont les segments NP, NQ que les perpendiculaires sur les rayons vecteurs, menées aux foyers, déterminent sur la normale.

On a donc

$$\frac{2}{NR} = \frac{1}{NP} + \frac{1}{NQ},$$

ce qui montre que le centre de courbure est conjugué harmonique du point de la courbe par rapport aux

Fig. 4.



points P et Q et, par suite, que le rayon de courbure est la moyenne harmonique des segments NP, NQ de la normale.

On voit avec quelle facilité nous sommes arrivés à ce résultat remarquable, auquel conduit aussi presque immédiatement la méthode des variations angulaires de M. Mannheim (*Nouvelles Annales,* t. XVI et XVIII). Le principe dont nous venons de faire usage avait été appliqué déjà à la même question (Salmon, *Sections coniques, méthodes infinitésimales*), mais la considération de ces cercles finis dépendant d'éléments infiniment petits donne ici à la solution une élégance et une simplicité plus grandes. Le procédé, fondé sur le fait que la normale est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs, convient également aux deux autres sections coniques, jouissant de la même propriété. Pour la parabole en particulier, on est conduit à la construction citée plus haut à propos de l'expression du rayon de courbure de la courbe. Ce procédé purement descriptif, appliqué di-

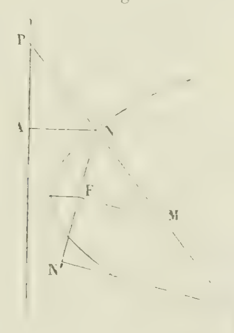
rectement à la parabole, est la plus simple des solutions de la question.

Poncelet, dans ses *Applications d'Analyse et de Géométrie*, arrive directement à ce résultat que le rayon de courbure de la parabole est double de la portion de normale comprise entre la courbe et sa directrice.

On passe sans peine de la construction donnée précédemment à cette dernière ou réciproquement.

Supposons le centre de courbure construit de la première façon : soient P le point de la normale sur la directrice, N′ le symétrique de N par rapport au foyer F,

Fig. 5.



A la projection de N sur la directrice. M étant le point où la perpendiculaire sur le rayon vecteur au foyer rencontre la normale, le rayon de courbure NR = 2MN ; mais les deux triangles rectangles NFM, NAP étant égaux, il s'ensuit NM = PM; donc

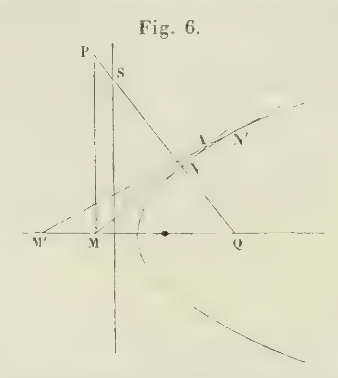
$$NR = 2PN.$$

Le raisonnement inverse donne la construction la plus connue en partant de celle de Poncelet.

Voici une autre solution également très rapide pour le cas de la parabole.

En deux points voisins N, N′ de la courbe, les normales se coupent en R et les tangentes en A; ces dernières rencontrent l'axe en M et en M′; la perpendiculaire à l'axe en M rencontre la normale au point P. Les circonférences circonscrites aux triangles NRN′,

Fig. 6.



MAM′ ont pour diamètres limites le rayon de courbure R et MP; leurs bases sont, pour le premier, la différence des rayons vecteurs de N et N′ divisée par cos α, α étant l'angle de la tangente en N avec l'axe; pour le second, cette différence même; on a donc

$$\frac{R}{MP} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

d'où

$$R = \frac{MP}{\cos\alpha} = PQ,$$

PQ étant la portion de normale comprise entre l'axe et sa perpendiculaire au pied de la tangente.

On passe encore sans difficulté de ce résultat à celui de Poncelet.

S étant le point où la normale rencontre la directrice, on a

$$PS + NQ = NS,$$

comme se projetant sur l'axe suivant une longueur égale

au rayon vecteur du point N. Ajoutant de part et d'autre SN, il vient

$$PQ = 2SN,$$

ce qui montre la concordance des résultats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1884.

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle O, et sur ce cercle deux points A, A'. On considère tous les couples de deux cercles C, C' tangents entre eux et tangents au cercle O, le premier en A, le second en A'.

1. Trouver le lieu du point de contact des cercles C, C'; puis, prenant un point sur ce lieu, reconnaître, d'après la position de ce point sur le lieu, le mode de contact des cercles C et C' qui correspondent à ce point, et le mode de contact de chacun d'eux avec le cercle O.

2. Trouver le lieu du point de concours des tangentes communes extérieures aux cercles C et C' d'un même couple.

3. A un point N du lieu précédent correspondent deux couples de cercles C et C'. Soit M le point de contact des cercles de l'un de ces couples, et soit M' le point de contact des cercles de l'autre couple. On considère le triangle NMM'.

Trouver le lieu du centre du cercle inscrit dans ce triangle, le lieu du centre du cercle circonscrit, le lieu du point de concours des hauteurs. Vérifier que tout point commun à deux de ces trois lieux appartient à l'autre.

4. Soit R le rayon du cercle O et θ l'angle des rayons

de ce cercle terminés en A et A′. Calculer les rayons d'un couple de cercles C et C′, tels que le rapport de la somme des aires de ces cercles à l'aire du cercle O soit égal à un nombre donné m. Discuter le problème dans le cas particulier où θ est droit et reconnaître, pour chaque solution, selon la valeur de m, le mode de contact des cercles C et C′, et le mode de contact de chacun d'eux avec le cercle O.

Philosophie.

Étant donné un triangle ABC et une droite L non située dans le plan du triangle, on joint aux points B et C un point quelconque D de la droite L, de façon à former un quadrilatère DBAC, dont les côtés ne sont pas nécessairement dans un même plan.

1. Démontrer que le quadrilatère, qui a pour sommets les points milieux des côtés du quadrilatère DBAC, est un parallélogramme.

2. Étudier les variations de la surface de ce parallélogramme, quand le point D se déplace sur la droite.

3. Trouver la position que le point D doit occuper sur la droite L, pour que le parallélogramme soit un losange ou un rectangle.

4. Examiner si ce parallélogramme peut devenir un carré.

Seconde.

1. On donne les rayons r et R de deux cercles, le premier inscrit, le second circonscrit à un même triangle isoscèle. Trouver la distance des centres des deux cercles, la base et la hauteur du triangle isoscèle. Discussion.

2. On donne trois droites A, B, C de l'espace, non parallèles à un même plan; on demande de construire une quatrième droite D, qui coupe les trois premières de telle sorte que les segments interceptés sur cette droite par les droites A, B, C soient égaux entre eux. Discussion.

ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1885).

Arithmétique.

1. Calculer le rayon du cercle dont la surface vaut un hectare. On n'emploiera que les deux premières décimales du nombre π, et l'on ne conservera au résultat que les chiffres exacts.

2. Démontrer que trois nombres impairs quelconques a, b, c ont le même plus grand commun diviseur que leurs demi-sommes deux à deux : $\frac{a-b}{2}$, $\frac{a-c}{2}$, $\frac{b-c}{2}$.

Algèbre.

On donne un triangle équilatéral ABC dont O est le centre de figure. On mène AO, BO, CO, et l'on prolonge ces trois lignes d'une même longueur

$$OA' = OB' = OC' = x.$$

On joint les trois points A', B', C' entre eux et aux sommets A, B, C du triangle donné. Désignant par R le rayon du cercle circonscrit au triangle donné, et par V le volume du tétraèdre qui aurait pour base le triangle équilatéral A'B'C', et pour faces latérales les trois triangles isoscèles AB'C', BC'A', CA'B', on demande :

1° Les valeurs de x pour lesquelles V est équivalent aux $\frac{3}{8}$ du cube construit sur x, $V = \frac{3}{8}x^3$. Interpréter la valeur négative;

2° Les valeurs de x qui rendent V maximum ou minimum;

3° L'étude des variations de V, quand x varie de $-\infty$ à $+R$.

Trigonométrie.

Dans un triangle rectiligne obliquangle ABC, on donne

$$A = 134°42'48'', \qquad a = 144^m,756, \qquad b = 98^m,642;$$

calculer B, C, c. Comme vérification, on calculera C par la formule

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Géométrie.

1. Énoncer les théorèmes qui conduisent à la mesure du volume engendré par un polygone plan tournant autour d'un axe situé dans son plan.

2. Comment passe-t-on de la mesure du volume engendré par un secteur polygonal régulier à la mesure du volume du secteur sphérique?

3. Étant données deux circonférences O et O′ et une direction fixe MN, par le centre de similitude S′ de ces deux circonférences, on mène une sécante quelconque S′A′A et, par les deux points homologues A et A′, les deux cordes AB et A′B′ parallèles à MN; on mène AB′ et BA′ qui se coupent en C :

1° Démontrer que si, par le point C, on mène une parallèle DE à MN, le lieu des points D et E est une

circonférence. En déduire que le lieu du point C est le diamètre de cette circonférence perpendiculaire à MN.

2° Démontrer plus généralement que, si, par le point P qui divise AA′ dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, on mène une parallèle PQRS à MN, le lieu des points P et S est une circonférence. En déduire que le lieu des points Q et R est une ellipse dont le grand axe est le diamètre de cette circonférence perpendiculaire à MN.

Géométrie descriptive.

On donne une sphère dont le centre se trouve dans le premier dièdre à égale distance du plan horizontal et du plan vertical $\omega O = \omega O' = 50^{mm}$, et dont le rayon $R = 25^{mm}$.

On demande de construire les projections d'un tronc de pyramide triangulaire ABC A′B′C′ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les plans de base ABC, A′B′C′ sont tangents à la sphère, parallèles à la ligne de terre, et font un angle de 45° avec la partie postérieure du plan horizontal.

2° Les arêtes latérales AA′, BB′, CC′ prolongées passent par le point ω; elles sont tangentes à la sphère et font entre elles des angles égaux.

On placera l'arête AA′ dans le plan de profil $O'\omega O$ et de manière à faire avec le plan horizontal le plus grand angle possible.

On indiquera les intersections de la sphère avec les faces du tronc de pyramide.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1885).

Mathématiques.

1. On donne un angle droit XOY, un point A dont la distance à OY est a et dont la distance à OX est b. Mener par ce point une sécante NAM, telle que l'on ait

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{AN}}^2 = k^2.$$

Discuter.

2. Quelles valeurs faut-il donner à x pour que la fonction

$$\frac{4x^4 - 20x^2 + 18}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

ait une valeur inférieure à 3?

Calcul trigonométrique.

Calculer les angles d'un triangle dont on donne les trois côtés :

$$a = 3645,43.$$
$$b = 4156,28.$$
$$c = 5047,56.$$

Géométrie descriptive.

On donne dans le premier dièdre un point A dont la cote $\alpha a'$ est 19^{mm} et dont l'éloignement αa est 22^{m}, et un point G dont la cote $\gamma g'$ est 53^{mm}, dont l'éloignement γg est 48^{mm}, et dont la distance au plan de profil de A vers la droite est 52^{mm}. La droite AG est une diagonale du parallélépipède rectangle dont une face est horizontale,

une autre parallèle au plan vertical. Trouver : 1° les projections du parallélépipède ; 2° celles de la sphère qui lui est circonscrite.

Par les milieux M, N, P des trois arêtes DH, BC, EF, on fait passer un plan ; trouver les intersections de ce plan avec le parallélépipède, avec la sphère, et les vraies grandeurs de ces sections.

Pour la mise à l'encre, on supprimera la portion de la sphère située au-dessus du plan sécant, et la portion du parallélépipède située au-dessous.

ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1885).

Mathématiques.

1. Démontrer le théorème qui donne l'expression de la somme des carrés de deux côtés d'un triangle en fonction du troisième côté et de la médiane correspondante. En conclure une expression de la somme

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2,$$

où M est un point quelconque pris dans le plan du triangle ABC, et faire voir que, dans ce plan, le lieu des points pour lesquels cette somme est égale à une constante donnée est un cercle K ; condition de possibilité.

Si l'on fait tourner le triangle ABC autour d'une parallèle DE au côté BC, telle que la distance BD soit égale à d, le volume engendré par le triangle est égal à sa surface multipliée par la circonférence décrite par le centre du cercle K.

2. Effectuer la division $\frac{1}{(1-x)^3}$; trouver la loi du quo-

tient et chercher, par les règles de la division, à quelle condition le quotient prolongé indéfiniment représente la fraction proposée.

3. Un particulier achète pour 70000^{fr} d'obligations de chemins de fer rapportant 16^{fr} d'intérêts; l'année suivante, il en achète d'autres au même cours pour 19600^{fr}. Au bout de deux ans, il cède toutes ses obligations au prix courant, joint à leur prix les intérêts simples qu'il en a retirés, plus la somme de 1280^{fr}, et achète avec le tout des obligations rapportant 15^{fr} de rente au cours de 250^{fr}. Il se fait ainsi 6000^{fr} de rente. On demande le nombre et le prix des premières obligations.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1. Résoudre un triangle connaissant le côté a, l'angle opposé A et la hauteur correspondante h. Discuter le problème; trouver la condition de possibilité, et la vérifier en construisant le triangle géométriquement.

2. Étant donnés dans un triangle les côtés

$$a = 28907^{m},15, \qquad b = 23125^{m},72, \qquad c = 17344^{m},29,$$

calculer les angles A, B, C, la surface S, le rayon R du cercle circonscrit, le rayon r du cercle inscrit, et les rayons r_1, r_2, r_3 des cercles exinscrits.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES.

Certificat d'aptitude.

Une sphère, de rayon R, et un cône droit, dont le rayon de base égale R et la hauteur 2R, sont posés sur

un plan P, le cône reposant sur sa base. On coupe les deux solides par un plan Q parallèle au plan P et situé à une distance x du plan P : 1° déterminer x de façon que les sections faites par le plan Q dans les deux solides aient la même surface; 2° déterminer x de façon que le volume du tronc de cône compris entre les plans P et Q soit égal à n fois le volume du segment sphérique compris entre ces mêmes plans. Pour quelles valeurs de n le problème est-il possible?

Agrégation.

1° Mesure du parallélépipède.

2° D'un point P pris sur le prolongement du diamètre AB d'une demi-circonférence de rayon R, on lui mène une tangente PC et l'on fait tourner la figure autour de la droite ABP. La droite PC engendre l'aire latérale d'un cône et l'arc BC engendre une zone. On demande à quelle distance de O il faut prendre le point P pour que le rapport de l'aire latérale du cône à l'aire de la zone soit égal à un nombre donné m. Le problème est-il toujours possible, quelle que soit la valeur attribuée à m?

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885.

Mathématiques spéciales.

Étant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère toutes les cordes de cette surface qui sont vues de centre sous un angle droit, et l'on demande :

1° L'équation du cône lieu géométrique des cordes D

qui passent par un point donné S, ainsi que les positions du point S pour lesquelles ce cône est de révolution ;

2° La courbe à laquelle sont tangentes toutes les cordes D situées dans un plan donné P, ainsi que les positions du plan P pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle.

Mathématiques élémentaires.

On donne trois points O, A, B non en ligne droite. On porte sur les droites AO, BO, à partir des points A et B, et du même côté de AB, les longueurs AC, BD égales à h. On porte aussi sur les mêmes droites, mais de part et d'autre de AB, des longueurs AC', BD' égales à h'.

1° Démontrer que la perpendiculaire à CD en son milieu passe par un point fixe ω, quand h varie; démontrer de même que la perpendiculaire à C'D' en son milieu passe par un point fixe ω', quand h' varie.

2° Construire la droite CD, connaissant sa longueur ; même question pour la droite C'D'.

3° Démontrer qu'à une droite CD correspond une droite C'D' et une seule, parallèle à CD; déterminer le système de ces deux droites parallèles de façon qu'elles soient égales entre elles.

4° On donne $OA = a$, $OB = b$, et l'on demande de calculer la valeur qu'il faut donner à l'angle AOB, pour que la distance des points ω et ω', tels qu'ils ont été définis ci-dessus, soit égale à une longueur donnée l. Discuter le problème.

Philosophie.

On donne un cercle O et un point G intérieur à ce cercle : 1° démontrer qu'il existe une infinité de tri-

angles ABC inscrits dans ce cercle et tels que les médianes de chacun d'eux se coupent en G; 2° trouver le lieu géométrique des milieux des côtés des triangles ABC; 3° examiner si, pour toutes les positions de G, on peut prendre un point quelconque de la circonférence O comme sommet d'un des triangles ABC; quand il en est autrement, déterminer l'arc du cercle O sur lequel sont situés les sommets des triangles ABC; 4° démontrer que la somme des carrés des côtés des triangles ABC a une valeur constante.

Troisième.

1. On donne sur une circonférence deux points fixes A et B, que l'on joint à un point quelconque M de la circonférence, et du centre on mène sur MB la perpendiculaire OK, qui, par sa rencontre avec MA, forme le triangle MKP. On propose de déterminer les lieux géométriques que décrivent : 1° le point de rencontre des médianes; 2° le point de rencontre des bissectrices; 3° le point de rencontre des hauteurs; 4° le centre du cercle circonscrit au triangle MKP, lorsque M se déplace sur la circonférence O.

2. On trace deux cercles ayant pour rayon $0^m,2$ et dont les centres O et O′ sont distants de $0^m,2$; on demande de calculer la surface de la partie OAO′B commune à ces deux cercles.

ÉCOLE DES MINEURS DE SAINT-ÉTIENNE (CONCOURS DE 1885).

Mathématiques.

Admissibilité. — Construire la courbe représentée par l'équation

$$(y - x - 1)(y - x - 1)(x - y - 1) = 1.$$

On exposera clairement la méthode employée pour construire un point de la courbe et la tangente en ce point.

Admission. — On donne une parabole $y^2 = 2px$. Trouver le lieu des points tels que le cercle passant par les points de contact des tangentes issues de ce point et par le sommet de la parabole ait un rayon constant R.

Calcul trigonométrique.

Dans le quadrilatère DACB, on donne

$AC = 251,328$, $BC = 219,912$, $BD = 1061,85976$,
$BAC = 27^\circ 47' 44'',77$, $DBA = 67^\circ 22' 48'',48$, $DAB = 90^\circ$;

calculer les autres éléments et la surface.

SESSION SUPPLÉMENTAIRE.

On a un triangle rectangle ABC, et l'on considère les hyperboles équilatères circonscrites. Du sommet de l'angle droit, on mène des normales à ces coniques : trouver le lieu des pieds de ces normales.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (PARIS, 1885).

1. Discuter la courbe représentée par l'équation

$$(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0.$$

2. Reconnaître la nature des différentes surfaces représentées par l'équation du second degré

$$x^2 + y^2 + hz^2 + 2azx + 2byz + 2cz = 0,$$

quand les coefficients h, a, b, c prennent toutes les valeurs possibles; déterminer les sections circulaires de ces surfaces.

SUR L'ALGORITHME $[abc\ldots l]^{(n)}$;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Nous représentons par $[abc\ldots l]^{(n)}$ le résultat que l'on obtient en remplaçant par l'unité les coefficients numériques dans le développement de

$$(a+b+c+\ldots+l)^n.$$

Cet algorithme, que nous avons étudié dans une Note (¹) et utilisé dans notre *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (²), a fait l'objet de recherches intéressantes, les unes antérieures, les autres postérieures, de la part de MM. Trudi, Fergola, Torelli, Cesaro, etc. Ce dernier a fait voir (³) que cet algorithme est *isobarique composé*.

2. Mettons à part tous les termes qui contiennent a à une puissance quelconque et, dans ces termes, mettons a en facteur commun. Nous voyons alors bien aisément que l'on a

$$(1)\qquad [abc\ldots l]^{(n)} = [bc\ldots l]^{(n)} + a[abc\ldots l]^{(n-1)}.$$

Cette formule se trouve dans notre première Note. Inutile de dire que, l'algorithme considéré étant symétrique par rapport à toutes les quantités qu'il renferme, on peut prendre pour a l'une quelconque de ces quantités.

Appliquant successivement la même transformation

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. II, p. 230.
(²) *Ibid.*, 3ᵉ série, t. III, p. 65.
(³) *Ibid.*, 3ᵉ série, t. IV, p. 67.

à $[abc\ldots l]^{(n-1)}$, à $[abc\ldots l]^{(n-2)}$, ..., on déduit de la formule précédente la suivante

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}[abc\ldots l]^{(n)} = [bc\ldots l]^{(n)} + a[bc\ldots l]^{(n-1)} \\ + a^2[bc\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + a^n,\end{aligned}\right.$$

qui se trouve également dans ma première Note.

Appliquant la transformation contenue dans cette formule même à $[bc\ldots l]^{(n)}$, à $[bc\ldots l]^{(n-1)}$, ..., on met cette expression sous la forme.

$$\begin{aligned}[abc\ldots l]^{(n)} = [c\ldots l]^{(n)} + b[c\ldots l]^{(n-1)} + b^2[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + b^n, \\ + a[c\ldots l]^{(n-1)} + ab[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + ab^{n-1}, \\ + a^2[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + a^2b^{n-2}, \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a^n;\end{aligned}$$

ou

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}[abc\ldots l]^{(n)} = [c\ldots l]^{(n)} + [ab]^{(1)}[c\ldots l]^{(n-1)} \\ + [ab]^{(2)}[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + [ab]^{(n)}.\end{aligned}\right.$$

En continuant à opérer par le même procédé, on arrive à la formule générale que voici :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&[a\ldots fg\ldots l\ldots s\ldots uv\ldots z]^{(n)} \\ &\quad = \Sigma[a\ldots f]^{(\lambda)}[g\ldots l]^{(\mu)}\ldots[s\ldots u]^{(\rho)}[v\ldots z]^{(\theta)},\end{aligned}\right.$$

la somme Σ s'étendant à toutes les combinaisons possibles des indices λ, μ, ..., ρ, θ, telles que

$$\lambda + \mu + \ldots + \rho + \theta = n.$$

Cette formule importante comprend toutes les précédentes.

3. Si p des quantités comprises entre les crochets sont égales à une même quantité α, nous écrirons l'algorithme de la façon suivante

$$[\alpha^{(p)}ab\ldots l]^{(n)};$$

quelquefois aussi, pour abréger l'écriture, nous écri-

rons K au lieu de $ab\ldots l$. Ainsi l'algorithme précédent prendra la forme

$$[\alpha^{(p)}K]^{(n)}.$$

En vertu de la formule (4), prise dans le cas où le nombre des crochets soumis au signe Σ n'est que de deux, on a

$$\begin{aligned}[\alpha^{(p)}K]^{(n)} = [K]^{(n)} + [\alpha^{(p)}]^{(1)}[K]^{(n-1)} + \ldots \\ + [\alpha^{(p)}]^{(i)}[K]^{(n-i)} + \ldots + [\alpha^{(p)}]^{(n)}.\end{aligned}$$

Mais chaque terme de $[\alpha^{(p)}]^{(i)}$ étant égal à α^i, on voit que

$$[\alpha^{(p)}]^{(i)} = \alpha^i[1^{(p)}]^{(i)}.$$

Donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}[\alpha^{(p)}K]^{(n)} = [K]^{(n)} + \alpha[1^{(p)}]^{(1)}[K]^{(n-1)} + \ldots \\ + \alpha^i[1^{(p)}]^{(i)}[K]^{(n-i)} + \ldots + \alpha^n[1^{(p)}]^{(n)}.\end{aligned}\right.$$

4. Nous allons calculer $[1^{(p)}]^{(n)}$. Pour cela, posons successivement

$$\sum_{i=0}^{i=n}(a^i - b^i) = \sum_{n}^{1}(a, b),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{i}^{1}(a, b) = \sum_{n}^{2}(a, b),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{i}^{2}(a, b) = \sum_{n}^{3}(a, b).$$

. . . .

Cette suite d'égalités définit ce que nous entendons par la notation $\sum_{n}^{p}(a, b)$ dont nous allons faire usage.

On a

$$\sum_{n}^{1}(a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} + a^n,$$

$$\sum_{n-1}^{1}(a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1},$$

. . . .

$$\sum_{1}^{1}(a) = 1 + a,$$

$$\sum_{0}^{1}(a) = 1,$$

Faisant la somme, on en déduit

$$\sum_{n}^{2}(a) = (n+1) + na + (n-1)a^2 + \ldots + 2a^{n-1} + a^n;$$

par suite,

$$\sum_{n-1}^{2}(a) = n + (n-1)a + (n-2)a^2 + \ldots + a^{n-1},$$

. . . . ;

$$\sum_{1}^{2}(a) = 2 + a,$$

$$\sum_{0}^{2}(a) = 1.$$

Faisant encore la somme, on a

$$\sum_{n}^{3}(a) = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} + \frac{n(n+1)}{1.2}a + \ldots + \frac{2.3}{1.2}a^{n-1} + a^n.$$

La loi de formation des coefficients du développement

de $\sum\limits_{n}^{p}$ apparaît très nettement. On voit que ce sont des nombres triangulaires. On a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{n}^{p} = {} & \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-1)} \\ & + \frac{n(n+1)\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots(p-1)}\, a + \ldots \\ & + \frac{2.3\ldots p}{1.2\ldots(p-1)}\, a^{n-1} + a^{n}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, la formule (2) donne successivement

$$\sum_{n}^{1}(a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = [1\,a]^{(n)}.$$

$$\sum_{n}^{2}(a) = [1\,a]^{(0)} + [1\,a]^{(1)} + \ldots + [1\,a]^{(n)} = [1^{(2)}\,a]^{(n)}.$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\sum_{n}^{p}(a) = [1^{(p)}\,a]^{(n)}.$$

La même formule permet encore de développer cette expression comme il suit :

$$(7)\quad \sum_{n}^{p}(a) = [1^{(p)}]^{(n)} + a[1^{(p)}]^{(n-1)} + \ldots + a^{n-1}[1^{(p)}]^{(1)} + a^{n}.$$

La comparaison des formules (6) et (7), qui sont vraies, quel que soit a, montre que

$$(8)\qquad [1^{(p)}]^{(n)} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-1)}.$$

Cette formule est très remarquable. En effet, si l'on se reporte à la définition que nous avons donnée de

$[abc\ldots l]^{(n)}$, on voit que $[1^{(p)}]^{(n)}$ *est égal au nombre des termes du développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme à p termes.*

Le calcul que nous venons de faire fournit donc une détermination de ce nombre, indépendante de la théorie des combinaisons.

Représentant par C_m^p le nombre des combinaisons de m objets pris p à p, on pourra écrire la formule précédente

$$(8') \qquad [1^{(p)}]^{(n)} = C_{n+p-1}^{p-1}.$$

5. La formule (2) donne

$$[x\mathrm{K}]^{(n)} = [\mathrm{K}]^{(n)} + x[\mathrm{K}]^{(n-1)} + \ldots + x^m[\mathrm{K}]^{(n-m)} + \ldots + x^n.$$

Dérivons m fois les deux membres de cette égalité par rapport à x; cela nous donne

$$\begin{aligned}\frac{d^m[x\mathrm{K}]^{(n)}}{dx^m} &= 1.2\ldots m[\mathrm{K}]^{(n-m)} + 2.3\ldots(m+1)x[\mathrm{K}]^{(n-m-1)} + \ldots \\ &\quad + (n-m+1)(n-m+2)\ldots n x^{n-m} \\ &= 1.2\ldots m \Big\{ [\mathrm{K}]^{(n-m)} + \frac{2.3\ldots(m+1)}{1.2\ldots m} x[\mathrm{K}]^{(n-m-1)} + \ldots \\ &\quad + \frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+m)}{1.2\ldots m} x^i[\mathrm{K}]^{(n-m-i)} + \ldots \\ &\quad + \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n}{1.2\ldots m} x^{n-m} \Big\}.\end{aligned}$$

Or, d'après la formule (8),

$$\frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+m)}{1.2\ldots m} = [1^{(m+1)}]^{(i)};$$

La formule précédente devient donc

$$\begin{aligned}\frac{d^m[x\mathrm{K}]^{(n)}}{dx^m} = 1.2\ldots m \Big\{ & [\mathrm{K}]^{(n-m)} + x[1^{(m+1)}]^{(1)}[\mathrm{K}]^{(n-m-1)} + \ldots \\ & + x^i[1^{(m+1)}]^{(i)}[\mathrm{K}]^{(n-m-i)} + \ldots \\ & + x^{n-m}[1^{(m+1)}]^{(n-m)} \Big\},\end{aligned}$$

ou, en vertu de la formule (5),

$$(9)\qquad \frac{d^m[xK]^{(n)}}{dx^m} = 1.2\ldots m[x^{(m+1)}K]^{(n-m)}.$$

Par application de cette formule, on a

$$\frac{d^{p-1}[xK]^{(p+n-1)}}{dx^{p-1}} = 1.2\ldots(p-1)[x^{(p)}K]^{(n)}.$$

Dérivons m fois les deux membres de cette identité par rapport à x; il vient

$$\frac{d^{m+p-1}[xK]^{(p+n-1)}}{dx^{m+p-1}} = 1.2\ldots(p-1)\frac{d^m[x^{(p)}K]^{(n)}}{dx^m}.$$

Mais, toujours d'après (9), on a

$$\frac{d^{m+p-1}[xK]^{(p+n-1)}}{dx^{m+p-1}} = 1.2\ldots(m+p-1)[x^{(m+p)}K]^{(n-m)}.$$

Comparant les deux dernières égalités, on en déduit la formule

$$(10)\qquad \frac{d^m[x^{(p)}K]^{(n)}}{dx^m} = p(p+1)\ldots(p+m-1)[x^{(m+p)}K]^{(n-m)},$$

qui généralise (9).

6. D'après la formule (2), on a

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}[ab]^{(i)} = [ab]^{(0)} + [ab]^{(1)} + \ldots + [ab]^{(n-1)}$$
$$= [1\,ab]^{(n-1)}.$$

Mais

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}[ab]^{(i)} = \frac{a-b}{a-b} + \frac{a^2-b^2}{a-b} + \ldots + \frac{a^n-b^n}{a-b}$$
$$= \frac{(1+a+\ldots+a^n)-(1+b+\ldots+b^n)}{a-b}$$
$$= \frac{\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1} - \dfrac{b^{n+1}-1}{b-1}}{a-1}$$

ou

$$(a-1)(b-1)\sum_{i=0}^{i=n-1}[ab]^{(i)} = ab\,\frac{a^n-b^n}{a-b} - \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} - 1$$
$$= ab[ab]^{(n-1)} - [ab]^{(n)} + 1.$$

Rapprochant cette formule de la précédente, on voit que

$$(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(n-1)} - ab[ab]^{(n-1)} + [ab]^{(n)} = 1.$$

Remplaçons dans cette formule n successivement par $n-1$, $n-2$, ..., cela nous donne

$$(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(n-2)} - ab[ab]^{(n-2)} + [ab]^{(n-1)} = 1,$$
$$(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(n-3)} - ab[ab]^{(n-3)} + [ab]^{(n-2)} = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(0)} \quad - ab[ab]^{(0)} \quad + [ab]^{(1)} \quad = 1;$$

écrivons aussi

$$[ab]^{(0)} = 1.$$

et faisons la somme des $n+1$ dernières égalités; il vient, en tenant compte de (2),

$$(a-1)(b-1)[1^2\,ab]^{(n-1)} - ab[1\,ab]^{(n-1)} + [1\,ab]^{(n)} = n+1.$$

De même,

$$(a-1)(b-1)[1^2\,ab]^{(n-2)} - ab[1\,ab]^{(n-2)} + [1\,ab]^{(n-1)} = n,$$
$$(a-1)(b-1)[1^2\,ab]^{(n-3)} - ab[1\,ab]^{(n-3)} + [1\,ab]^{(n-2)} = n-1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$(a-1)(b-1)[1^2\,ab]^{(0)} \quad - ab[1\,ab]^{(0)} \quad + [1\,ab]^{(1)} \quad = 2,$$
$$[1\,ab]^{(0)} \quad = 1.$$

Faisant encore la somme nous avons

$$(a-1)(b-1)[1^3\,ab]^{(n-1)} - ab[1^2\,ab]^{(n-1)} + [1^2\,ab]^{(n)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = [1^3]^{(n)}.$$

Continuant à appliquer le même procédé, on arrive.

de proche en proche, à la formule

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} (a-1)(b-1)[1^{(p)}ab]^{(n-1)} \\ \qquad - ab[1^{(p-1)}ab]^{(n-1)} + [1^{(p-1)}ab]^{(n)} = [1^{(p)}]^{(n)}. \end{array} \right.$$

Si dans cette formule on fait $a = b = 0$, on a

$$[1^{(p)}]^{(n-1)} + [1^{(p-1)}]^{(n)} = [1^{(p)}]^{(n)},$$

ou, d'après (8′),

$$C^{p-1}_{n+p-2} + C^{p-2}_{n+p-2} = C^{p-1}_{n+p-1},$$

qui est, on le reconnaîtra sans peine, l'expression d'un théorème connu.

Pour $a = b = 1$, la formule (11) donne

$$-[1^{(p+1)}]^{(n-1)} + [1^{(p+1)}]^{(n)} = [1^{(p)}]^{(n)}$$

ou, en faisant passer le premier terme du premier membre dans le second,

$$C^{p}_{n+p} = C^{p}_{n+p-1} + C^{p-1}_{n+p-1},$$

qui est encore l'expression du même théorème.

7. $a, b, \ldots, l$ étant les racines de l'équation

$$f(z) = z^p + A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-2} + \ldots + A_{p-1} z + A_p = 0,$$

et Σa^n représentant la somme $a^n + b^n + \ldots + l^n$, on sait que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z} + \frac{\Sigma a}{z^2} + \frac{\Sigma a^2}{z^3} + \ldots + \frac{\Sigma a^n}{z^{n+1}} + \ldots.$$

Mais la formule (5) de ma première Note donne

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^p} + \frac{[ab\ldots l]^{(1)}}{z^{p+1}} + \frac{[ab\ldots l]^{(2)}}{z^{p+2}} + \ldots + \frac{[ab\ldots l]^{(m)}}{z^{p+m}} + \ldots$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\Sigma a^i}{z^{i+1}} = (p z^{p-1} + (p-1) A_1 z^{p-2} + \ldots + A_{p-1}) \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{[ab\ldots l]^{(i)}}{z^{p+i}}.$$

L'identification des deux membres de cette formule fait voir que

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum a^n = {} & p[ab\ldots l]^{(n)} + (p-1)A_1[ab\ldots l]^{(n-1)} \\ & + (p-2)A_2[ab\ldots l]^{(n-2)} + \ldots \\ & + A_{p-1}[ab\ldots l]^{(n-p+1)}. \end{aligned} \right.$$

8. Dans cette formule faisons $a = b = \ldots = l = 1$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} p = {} & p[1^{(p)}] - p(p-1)[1^{(p)}]^{(n-1)} \\ & + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}[1^{(p)}]^{(n-2)} + \ldots \\ & + (-1)^{p-1} p [1^{(p)}]^{(n-p+1)} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 1 = {} & [1^{(p)}]^{(n)} - (p-1)[1^{(p)}]^{(n-1)} \\ & + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}[1^{(p)}]^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{p-1}[1^{(p)}]^{(n-p+1)} \end{aligned}$$

ou encore, en vertu de la formule (8′), et en représentant toujours par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets n à n, c'est-à-dire le quotient du produit de n nombres consécutifs dont le plus grand est m, par le produit des n premiers nombres entiers, C_m^n étant pris égal à 1 pour $n = 0$ et à 0 pour $n > m$,

$$\begin{aligned} 1 = {} & C_{p-1}^0 - C_{p-1}^1 C_{n+p-2}^{p-1} \\ & + C_{p-1}^2 C_{n+p-3}^{p-1} - \ldots + (-1)^{p-1} C_{p-1}^{p-1} C_n^{p-1}. \end{aligned}$$

Remplaçant dans cette formule $p-1$ par p, on peut l'écrire

$$(13) \qquad 1 = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i C_p^i C_{n+p-i}^p.$$

9. Nous allons tirer de la formule (12) d'autres curieuses conséquences. Si les quantités $a, b, \ldots, l$ sont respectivement égales aux p racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_p$, c'est-à-dire sont racines de l'équation

$$z^p - 1 = 0,$$

la formule (12) donne

$$(14) \qquad \sum_{i=0}^{i=p} \omega_i^n = p[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)}.$$

Or on sait que $\sum_{i=0}^{i=p} \omega_i^n$ est égale à p ou à 0, suivant que n est, ou non, divisible par p.

Donc $[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)}$ est égal à 1 ou à 0 suivant que n est, ou non, divisible par p.

Avant d'aller plus loin, nous conviendrons d'adopter certaines notations. Ainsi nous poserons

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)} = \Omega^{(n)}.$$

Si dans cet algorithme nous supprimons l'élément ω_i, nous obtenons un résultat que nous représenterons par $\Omega_i^{(n)}$. Si nous supprimons les éléments ω_i et ω_j, nous écrirons $\Omega_{ij}^{(n)}$, et ainsi de suite.

La formule (1) donne

$$\Omega_1^{(n)} = \Omega^{(n)} - \omega_1 \Omega^{(n-1)};$$

ω_1 est d'ailleurs l'une quelconque des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. En nous reportant à la remarque faite plus haut, nous voyons que

Pour $n = \nu p$ . . . . $\Omega_1^{(n)} = 1$

Pour $n = \nu p + 1$ . . . . $\Omega_1^{(n)} = -\omega_1$

Pour $n = \nu p + 2$
Pour $n = \nu p + 3$
. . . . $\Omega_1^{(n)} = 0$
Pour $n = \nu p + p - 1$

De même la formule (1) donne

$$\Omega_{1\,2}^{(n)} = \Omega_{1}^{(n)} - \omega_2 \Omega_{1}^{(n-1)}.$$

De cette formule on déduit, en se reportant à ce qui précède, que

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } n = \nu p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2}^{(n)} = 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2}^{(n)} = -(\omega_1 + \omega_2) \\
\text{Pour } n = \nu p + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2}^{(n)} = \omega_1 \omega_2
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } n = \nu p + 3 \\
\text{Pour } n = \nu p + 4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{Pour } n = \nu p - p - 1
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \Omega_{1\,2}^{(n)} = 0$$

De même encore, la formule

$$\Omega_{1\,2\,3}^{(n)} = \Omega_{1\,2}^{(n)} - \omega_3 \Omega_{1\,2}^{(n-1)}.$$

déduite de (1), montre que

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } n = \nu p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\,3}^{(n)} = 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\,3}^{(n)} = -(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) \\
\text{Pour } n = \nu p + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\,3}^{(n)} = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 \\
\text{Pour } n = \nu p + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\,3}^{(n)} = -\omega_1 \omega_2 \omega_3
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } n = \nu p + 4 \\
\text{Pour } n = \nu p + 5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{Pour } n = \nu p + p - 1
\end{array}\right\} \ldots \quad \Omega_{1\,2\,3}^{(n)} = 0$$

Ces résultats se généralisent avec la plus grande facilité. On a

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } n = \nu p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\ldots i}^{(n)} = 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\ldots i}^{(n)} = -(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_i) \\
\text{Pour } n = \nu p + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\ldots i}^{(n)} = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \ldots + \omega_{i-1} \omega_i \\
\text{Pour } n = \nu p + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\ldots i}^{(n)} = -(\omega_1 \omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 + \ldots \\
 & \qquad + \omega_{i-2} \omega_{i-1} \omega_i) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{Pour } n = \nu p + i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_{1\,2\ldots i}^{(n)} = (-1)^i \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_i
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } n = \nu p + i + 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + i + 2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{Pour } n = \nu p + p - 1
\end{array}\right\} \ldots\ldots \quad \Omega_{1.2\ldots i}^{(n)} = 0$$

On peut donc énoncer ce théorème général :

Dans l'algorithme $\Lambda = [ab\ldots l]^{(n)}$, *les éléments* $a, b, \ldots, l$, *au nombre de* k, *étant des racines* $p^{\text{ièmes}}$ *de l'unité, toutes différentes les unes des autres, soit* R *le reste de la division de* n *par* p : 1° *Si* R *est nul,* Λ *est égal à* 1. 2° *Si* R *est un des nombres* $1, 2, 3, \ldots, p-k$, Λ *est égal à plus ou moins la somme des produits* R *à* R *des* $p-k$ *racines* $p^{\text{ièmes}}$ *de l'unité qui n'entrent pas dans la composition de* Λ, *suivant que* R *est pair ou impair.* 3° *Si* R *est supérieur à* $p-k$, Λ *est nul.*

En convenant que la somme des produits μ à μ de ν quantités sera prise égale à 1 si $\mu = 0$, et à 0 si $\mu > \nu$, on pourra dire dans tous les cas que Λ *est égal à la somme des produits* R *à* R *des* $p-k$ *racines* $p^{\text{ièmes}}$ *de l'unité qui n'entrent pas dans la composition de* Λ, *cette somme étant affectée du signe* $+$ *ou du signe* $-$ *suivant que* R *est pair ou impair.*

10 La formule (12) donne, en remplaçant dans les crochets $ab\ldots l$ par K,

$$a^n + b^n + \ldots + l^n = p[K]^{(n)} + (p-1)\Lambda_1[K]^{(n-1)} + (p-2)\Lambda_2[K]^{(n-2)} + \ldots + \Lambda_{p-1}[K]^{(n-p+1)},$$

$$a^{n-1} + b^{n-1} + \ldots + l^{n-1} = p[K]^{(n-1)} + (p-1)\Lambda_1[K]^{(n-2)} + (p-2)\Lambda_2[K]^{(n-3)} + \ldots + \Lambda_{p-1}[K]^{(n-p)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a^{p-1} + b^{p-1} + \ldots + l^{p-1} = p[K]^{(p-1)} + (p-1)\Lambda_1[K]^{(p-2)} + (p-2)\Lambda_2[K]^{(p-3)} + \ldots + \Lambda_{p-1}[K]^{(0)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a + b + \ldots + l = p[K]^{(1)} + (p-1)\Lambda_1[K]^{(0)},$$

$$1 + 1 + \ldots + 1 = p[K]^{(0)}.$$

Faisant la somme de toutes ces égalités, nous avons, en vertu de la formule (2) et en faisant usage des notations proposées au n° 4,

$$\sum_n^1 (ab\ldots l) = p[1\,\mathrm{K}]^{(n)} + (p-1)\,\mathrm{A}_1[1\,\mathrm{K}]^{(n-1)}$$
$$+ (p-2)\,\mathrm{A}_2[1\,\mathrm{K}]^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{A}_{p-1}[1\,\mathrm{K}]^{(n-p+1)}.$$

Opérant sur cette nouvelle formule comme nous venons de le faire sur la formule (12), puis encore de la même manière sur le résultat obtenu, et ainsi de suite, suivant la méthode employée dans tout le cours de ce travail, on finit par obtenir la formule générale

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_n^q (ab\ldots l) \\ &\quad = p[1^{(q)}\mathrm{K}]^{(n)} + (p-1)\,\mathrm{A}_1[1^{(q)}\mathrm{K}]^{(n-1)} \\ &\qquad + (p-2)\,\mathrm{A}_2[1^{(q)}\mathrm{K}]^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{A}_{p-1}[1^{(q)}\mathrm{K}]^{(n-p+1)}. \end{aligned}\right.$$

Ainsi l'on a

$$\sum_n^q (ab) = 2[1^{(q)}ab]^{(n)} - (a+b)[1^{(q)}ab]^{(n-1)},$$

$$\sum_n^q (a) = [1^{(q)}a]^{(n)}.$$

Cette dernière formule a déjà été trouvée au n° 4.

11. Dans la formule (15), faisons

$$a = b = \ldots = l = 1.$$

Cela nous donne

$$\sum_n^q (1^{(p)}) = p[1^{(p+q)}]^{(n)} - p(p-1)[1^{(p+q)}]^{(n-1)}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}[1^{(p+q)}]^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}p[1^{(p+q)}]^{(n-p+1)}.$$

ou, d'après la formule (8'),

$$\sum_n^{(q)} (1^{(p)}) = C_p^1 C_{n+p+q-1}^{p+q-1} - 2 C_p^2 C_{n+p+q-2}^{p+q-1} + 3 C_p^3 C_{n+p+q-3}^{p+q-1} - \ldots + (-1)^{p-1} p C_p^p C_{n+q}^{p+q-1}$$

ou encore

$$(16) \qquad \sum_n^{(q)} (1^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{i-1} C_p^i C_{n+p+q-i}^{p+q-1}.$$

12. Remplaçons enfin, dans la formule (15), $a, b, \ldots, l$ par les p racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous aurons

$$\sum_n^{(q)} (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) = p [1^{(q)} \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)}$$

ou, d'après la formule (5) et en nous conformant aux notations du n° 9,

$$\sum_n^{(q)} (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) = p \{ [1^{(q)}]^{(n)} + [1^{(q)}]^{(n-1)} \Omega^{(1)} + [1^{(q)}]^{(n-2)} \Omega^{(2)} + \ldots + [1^{(q)}]^{(1)} \Omega^{(n-1)} + \Omega^{(n)} \}.$$

Or nous avons vu que $\Omega^{(k)}$ est égal à 1 ou à 0 suivant que k est, ou non, divisible par p. Donc, si, divisant n par p, on trouve

$$n = \nu p + \rho,$$

on voit que la formule précédente devient

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_n^{(q)} (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) \\ &\quad = p \{ [1^{(q)}]^{(n)} + [1^{(q)}]^{(n-p)} + [1^{(q)}]^{(n-2p)} + \ldots + [1^{(q)}]^{(n-\nu p)} \} \end{aligned} \right.$$

ou, en employant la notation connue $E\left(\frac{n}{p}\right)$ pour repré-

senter la partie entière du quotient de n par p,

$$\sum_{n}^{q}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_p) = p\sum_{i=0}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)}[1^{(q)}]^{(n-ip)}.$$

En particulier, pour $n < p$,

$$\sum_{n}^{q}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_p) = p[1^{(q)}]^{(n)}.$$

D'après la formule (8′), la formule (17) peut s'écrire

$$(17')\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{n}^{q}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_p)\\ &\quad = p(\mathrm{C}_{n+q-1}^{q-1} + \mathrm{C}_{n-p+q-1}^{q-1} + \ldots + \mathrm{C}_{n-ip+q-1}^{q-1}).\end{aligned}\right.$$

THÉORÈMES SUR LES RAYONS DE COURBURE D'UNE CLASSE DE COURBES GÉOMÉTRIQUES;

PAR M. R. GODEFROY,
Élève de l'École Polytechnique.

Les ellipses et paraboles d'ordre quelconque, courbes représentées en coordonnées cartésiennes par les équations $\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}y^m = \mathrm{C}$, $y^m = \mathrm{A}x^n$ jouissent de relations simples entre leurs rayons de courbure et certains éléments de leur figure.

Commençons par les ellipses, dont nous supposerons d'abord le degré entier.

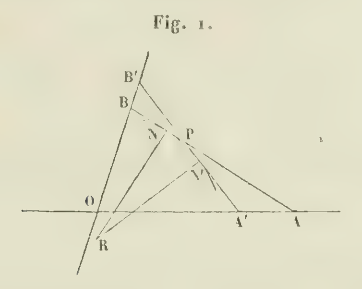
Les normales en deux points voisins $\mathrm{N}(x,y)$ et $\mathrm{N}'(x',y')$ se coupent en R. Les tangentes correspondantes se coupent en P et rencontrent en A, A′ l'axe des ab-

scisses, en B, B′ celui des ordonnées. A la limite N′ viendra coïncider avec N.

Nous appellerons O, A, B les angles du triangle formé par les axes et la tangente AB.

Les triangles NRN′, APA′ ont leurs bases propor-

Fig. 1.



tionnelles aux diamètres de leurs cercles circonscrits.

Ces diamètres sont à la limite le rayon de courbure R en N et le segment a de la perpendiculaire à l'axe OA au pied de la tangente, compris entre cet axe et la normale en N.

Quant aux bases, elles ont pour expression

$$(x - x')\frac{\sin O}{\sin B}, \qquad \frac{C}{A}\,\frac{x^{m-1} - x'^{m-1}}{x^{m-1}x'^{m-1}}.$$

Le principe que nous venons d'invoquer donne alors

$$\frac{R}{a} = \frac{(x - x')\dfrac{\sin O}{\sin B}}{\dfrac{C}{A}\,\dfrac{x^{m-1} - x'^{m-1}}{x^{m-1}x'^{m-1}}} = \frac{A.\sin O\, x^{m-1}x'^{m-1}}{C\sin B(x^{m-2} + x^{m-3}x' + \ldots + x'^{m-2})}$$

$$= \frac{A\sin O\, x^{2m-2}}{(m-1)C\sin B\, x^{m-2}} = \frac{A}{C}\,\frac{\sin O}{(m-1)\sin B}\,x^m$$

ou

$$\frac{R}{a}(m-1)\frac{\sin B}{\sin O} = \frac{A}{C}x^m;$$

de même

$$\frac{R}{b}(m-1)\frac{\sin A}{\sin O} = \frac{B}{C}y^m.$$

en appelant b le segment analogue de a, relatif à l'autre axe.

En ajoutant ces deux égalités, on obtient celle-ci

$$\frac{(m-1)R}{\sin O}\left(\frac{\sin B}{a}+\frac{\sin A}{b}\right)=1,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\sin O}{R}=(m-1)\left(\frac{\sin B}{a}+\frac{\sin A}{b}\right).$$

Cette dernière relation est, sous forme générale, l'expression même du théorème que nous avions en vue.

Nous avons tenu à donner à cette relation sa forme la plus générale; mais la véritable utilité du théorème dépend du cas où les axes de coordonnées sont rectangulaires : $\frac{\sin B}{a}$, $\frac{\sin A}{b}$ sont alors les inverses des segments p, q de la normale en N compris entre chaque axe et sa perpendiculaire au pied de la tangente.

La relation prend alors la forme définitive

$$\frac{1}{R}=(m-1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

qui exprime le rayon de courbure en fonction de deux segments analogues de la normale qui le contient. La formule est directement applicable aux sections coniques. Le coefficient $(m-1)$ est ici égal à l'unité. Dans le cas de l'hyperbole, il faut faire précéder du signe — le segment de la normale correspondant à l'axe non transverse.

On ramène aisément cette expression du rayon dans le cas d'une conique à centre à la formule connue

$$R=\frac{d^2}{h}$$

(Dupin, *Développements de Géométrie*), où d est le demi-diamètre parallèle à la tangente, et h la distance de ces deux droites.

Considérons en effet une ellipse : α étant l'angle de la tangente avec le grand axe, on a

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos^2\alpha}{NA}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{\cos^2\beta}{NB};$$

donc

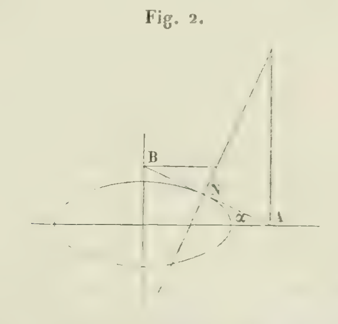
$$\frac{1}{R} = \frac{AB\cos^2\alpha}{NA.NB} = \frac{h}{d^2},$$

d'où

$$R = \frac{d^2}{h}.$$

Pour la parabole, le résultat est particulièrement simple. Cette courbe étant considérée comme limite d'une ellipse dont le grand axe croît indéfiniment, l'un des segments de normale devient infini ; par suite, *le rayon de courbure est égal au segment de normale*

Fig. 2.



compris entre l'axe et sa perpendiculaire au pied de la tangente. Cette construction du rayon de courbure conduit à la solution connue ou s'en déduit sans peine par la simple égalité de deux triangles sans qu'il soit nécessaire d'y insister.

Nous avons supposé le degré entier : supposons actuel-

lement que m soit de la forme $\frac{n-1}{n}$, cas qui présente des applications à des courbes connues. La même marche que précédemment donne ici

$$\frac{\sin O}{R} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin B}{a} + \frac{\sin A}{b}\right),$$

et

$$\frac{n}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

pour le cas utile des axes rectangulaires.

La parabole rentre dans cette catégorie ; si l'on prend effectivement pour axes deux tangentes à la courbe sur lesquelles celle-ci intercepte des longueurs m, n, la parabole a pour équation

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Prenons deux tangentes orthogonales : p et q étant toujours les mêmes segments de normale considérés jusqu'ici, le rayon de courbure est donné par

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

On voit par là que : une parabole roulant dans un angle droit en entraînant une de ses normales, la moyenne harmonique des segments considérés est constante.

Les développées de sections coniques ayant pour tangente la normale à la courbe dont elles sont la développée, on a de suite les segments p et q reliés au rayon de courbure par la relation

$$\frac{3}{R} = \frac{1}{p} \pm \frac{1}{q},$$

suivant qu'il s'agit de la développée d'ellipse ou de celle d'hyperbole.

La formule étendue à la développée de parabole donne ce théorème très simple :

Le rayon de courbure de la développée de parabole est triple de la portion de normale comprise entre l'axe de la courbe et sa perpendiculaire au point où la normale de la parabole rencontre l'axe.

On voit sur la figure ci-dessous la série d'égalités

$$QR = AM = TN = PS,$$

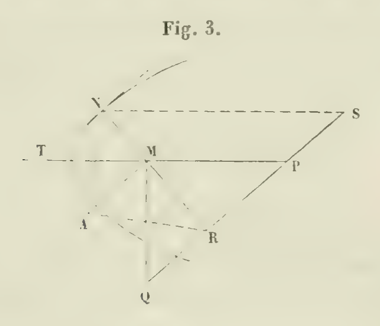
d'où

$$PQ = RS.$$

Le rayon de courbure est donc aussi égal à 3RS.

Ceci nous ramène, pour la parabole, à ce théorème de Maclaurin : Le rayon de courbure en un point de la développée d'une conique est triple du segment de la nor-

Fig. 3.



male à la développée compris entre la courbe et le diamètre de la conique correspondant au point considéré de la développée.

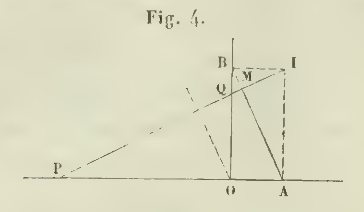
L'enveloppe d'une droite de longueur constante a, mobile dans un angle droit, est l'hypocycloïde à quatre rebroussements

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Pour une position AB de la droite, le centre instan-

tané de rotation est en I; M, pied de la perpendiculaire

Fig. 4.



abaissée de ce point sur AB, est le point où AB touche son enveloppe.

La normale MI coupant les axes en P et Q, l'application du théorème donne

$$\frac{3}{R} = \frac{1}{PI} + \frac{1}{QI}.$$

Mais le faisceau des droites OP, OQ, OI et de la parallèle menée par O à AB est harmonique (AB parallèle à un rayon est coupée en segments égaux par les trois autres); on a donc

$$\frac{1}{PI} + \frac{1}{QI} = \frac{2}{2\,MI} = \frac{1}{MI},$$

par suite

$$R = 3\,MI.$$

On arrive ainsi à ce résultat remarquable dû à M. Lamarle que, *pour une position de la droite, le rayon de courbure de son enveloppe est triple de la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation sur la droite*, ou encore triple de la distance de l'origine à la droite.

Il est d'ailleurs dirigé dans le sens MI.

Ce résultat s'aperçoit également sans difficultés en construisant le rayon de courbure de la courbe considérée soit comme épicycloïde, soit comme enveloppe d'une courbe entraînée dans un mouvement épicycloï-

dal, au moyen de l'une ou de l'autre des deux règles données par Euler.

Les paraboles $y^m = Ax^n$ comprennent les paraboles proprement dites quand m et n sont de même signe et les hyperboles quand ils sont de signes contraires.

Ces courbes jouissent de cette propriété, utilisée pour la quadrature de leurs segments, que deux tangentes quelconques interceptent, sur l'un ou l'autre des axes de coordonnées, une longueur en rapport constant avec la différence des coordonnées correspondantes de leurs points de contact. Par le fait, le rayon de courbure s'exprime séparément en fonction de chacun des segments que nous avons considérés jusqu'ici.

Les mêmes notations que précédemment étant conservées pour le cas actuel, on a les formules

$$\frac{\sin O}{R} = \frac{n-m}{n}\frac{\sin B}{a} = \frac{m-n}{m}\frac{\sin A}{b}$$

et, dans le cas des axes orthogonaux,

$$R = \frac{n}{m-n}p = \frac{m}{m-n}q.$$

Nous retrouvons, en particulier, au moyen de ces formules, les résultats obtenus antérieurement pour la parabole et sa développée.

UNE APPLICATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME D'ABEL;

Par M. Fritz HOFMANN.

Problème. — *Construire la formule pour* $\cos(A+B)$ *par la méthode d'Abel.*

I. Envisageons l'équation

$$(x+a)\sqrt{x} - b\sqrt{1-x} = 0 \tag{1}$$

ou

$$(x+a)^2 x - b^2(1-x) = 0 = f(x). \tag{2}$$

Les trois racines x_1, x_2, x_3 de l'équation (2) dépendent des valeurs des constantes a et b (tandis que réciproquement ces constantes a, b sont déterminées par les valeurs de deux de ces racines).

Supposons des valeurs quelconques attribuées à ces constantes a, b, alors l'équation (2) nous fournirait aussi trois expressions analytiques pour les racines x_1, x_2, x_3. Nous ne formerons pas ces expressions ; leur existence nous assure, premièrement, que, pour des variations infiniment petites de a et b, les racines x_1, x_2, x_3 varient aussi infiniment peu, et deuxièmement qu'il est possible de tenir séparées l'une de l'autre ces trois racines de l'équation (2) pendant un mouvement continu des valeurs de a et b.

L'équation (1) permet les transformations

$$(x+a)x = b\sqrt{x-x^2}, \tag{3}$$

$$(x+a)\sqrt{x-x^2} = b(1-x) \tag{4}$$

que nous allons employer tout de suite.

D'après ce que nous avons établi, il est permis de différentier par rapport à a, b, x l'équation (2)

$$f(x) = (x+a)^2 x - b^2(1-x) = 0 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

où x est employé pour marquer une des trois racines x_1, x_2, x_3. Nous trouvons

$$f'(x)\,dx + 2[(x+a)x\,da - b(1-x)\,db] = 0.$$

En substituant les expressions (3) et (4), on a

$$f'(x)\,dx = 2\left[(x+a)\sqrt{x-x^2}\,db - b\sqrt{x-x^2}\,da\right]$$

ou

$$(5)\qquad \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 2\,\frac{(x+a)\,db - b\,da}{f'(x)}.$$

En substituant les trois racines x_1, x_2, x_3 et en ajoutant, on en tire

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_3}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \\ &\qquad = 2\int\sum\frac{(x+a)\,db - b\,da}{f'(x)}, \end{aligned}\right.$$

où le signe $\sum$ se rapporte aux trois différentes racines x_1, x_2, x_3, et où les limites de l'intégrale à droite se déterminent par la position initiale et finale des valeurs a et b.

L'expression $\sum\frac{(x+a\,db - b\,da}{f'(x)}$ s'évanouit identiquement. Pour voir cela, rappelons la formule connue

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= \frac{\varphi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \\ &= \frac{\varphi(x_1)}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{(x-x_2)f'(x_2)} + \frac{\varphi(x_3)}{(x-x_3)f'(x_3)}, \end{aligned}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{(x+a)\,db - b\,da}{f(x)} &= \frac{(x_1+a)\,db - b\,da}{(x-x_1)f'(x_1)} \\ &\quad + \frac{(x_2+a)\,db - b\,da}{(x-x_2)f'(x_2)} + \frac{(x_3+a)\,db - b\,da}{(x-x_3)f'(x_3)}. \end{aligned}$$

En multipliant, on en tire

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} (x+a)\,db - b\,da = {} & \frac{(x_1+a)\,db - b\,da}{f'(x_1)}(x-x_2)(x-x_3) \\ & + \frac{(x_2+a)\,db - b\,da}{f'(x_2)}(x-x_1)(x-x_3) \\ & + \frac{(x_3+a)\,db - b\,da}{f'(x_3)}(x-x_1)(x-x_2); \end{aligned}\right.$$

ce qui est une identité.

A droite de (7), le coefficient de x^2 est justement la somme $\sum \frac{(x+a)\,db - b\,da}{f'(x)}$, et il faut bien qu'elle s'évanouisse, puisqu'il n'y a pas de deuxième puissance de x à gauche.

Donc l'équation (6) nous donne d'abord

$$(8) \qquad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \mathrm{C}.$$

Il s'agit maintenant d'établir la dépendance des trois racines x_1, x_2, x_3 entre elles. Étant données x_1 et x_2, on les substituera dans (1) pour obtenir les valeurs de a et b en fonction de x_1 et x_2,

$$(9) \qquad \begin{cases} (x_1+a)\sqrt{x_1} - b\sqrt{1-x_1} = 0, \\ (x_2+a)\sqrt{x_2} - b\sqrt{1-x_2} = 0. \end{cases}$$

En éliminant a, on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(10) \qquad b = -\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\left(\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1+x_1}\right).$$

Mais, par l'équation (2), on apprend que le produit des trois racines x_1, x_2, x_3 est égal à b^2; donc

$$(11) \qquad x_3 = \left(\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\right)^2.$$

On en conclut que $x_3 = 0$ pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; donc $\mathrm{C} = 0$ dans l'équation (8). Elle se transforme en

$$(12) \qquad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x_2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 0.$$

Nous voilà à même de formuler le théorème suivant :

Quand il existe entre les trois valeurs x_1, x_2, x_3 *la relation* (12), *on a en même temps*

$$x_3 = \left(\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\right)^2.$$

II. Faisons la substitution $x = \frac{1+z}{2}$; alors les réductions nécessaires faites, le même théorème s'énonce comme il suit :

Étant donné

$$(13) \qquad \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\int_0^{z_3} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

on a en même temps

$$\frac{1+z_3}{2} = \frac{1}{4}\left[2 - 2z_1z_2 + 2\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\right]$$

ou

$$(14) \qquad z_3 = \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} - z_1z_2.$$

Mais les équations (13) et (14) contiennent la solution du problème proposé.

Posons

$$\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \mathrm{A},$$

$$\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \mathrm{B},$$

$$-\int_0^{z_3} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \mathrm{C}':$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{C}'.$$

On a

$$z_1 = \sin \mathrm{A}, \qquad z_2 = \sin \mathrm{B}, \qquad z_3 = \cos \mathrm{C}' = \cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}).$$

L'équation (14) nous dit que

$$z_1 = \cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} - \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

RECTIFICATION;

Par M. H. PICQUET.

M. Brisse veut bien me communiquer un article de M. Lefèvre (*Nouvelles Annales,* 1884; p. 5), où il construit, comme je l'ai fait moi-même dans le dernier numéro de ce Recueil, les points doubles de la projection de l'intersection de deux cônes du second degré. Je dois conclure de là, suivant une locution usitée, que j'ai enfoncé une porte ouverte, et je prie M. Lefèvre et les lecteurs des *Nouvelles Annales* de croire à tous mes regrets. Ajouterai-je cependant qu'une opinion répandue parmi certains élèves de Mathématiques spéciales, à Paris, étant qu'on ne peut pas construire ces points au moyen de la règle et du compas, j'ai été conduit par là, depuis nombre d'années, à expliquer, sinon dans ses détails, au moins dans son ensemble, la solution dont il s'agit.

Cela posé, M. Lefèvre me permettra peut-être quelques critiques de détail.

1° Après avoir fait observer que les points cherchés forment le couple commun à deux involutions définies chacune par deux couples, M. Lefèvre ajoute qu'on devra s'arranger de façon que les points doubles de chaque involution soient réels. On sait que cela n'est pas nécessaire et que l'on peut construire les points cherchés sans passer par l'intermédiaire des points doubles. La construction que j'ai indiquée par cinq cercles et celle que je vais en déduire en sont la preuve.

2° M. Lefèvre traite seulement le cas où les plans limites sont réels : il doit effectivement être traité à part. Mais si la droite qui joint les sommets est à l'intérieur des deux cônes, il n'y a pas de plans limites, et *ce n'est pas un cas particulier*. Il est donc indispensable d'avoir une construction indépendante des plans limites, et voici celle que je propose définitivement pour le cas général : c'est la transformée par rayons vecteurs réciproques de celle que j'ai donnée par cinq cercles, et, comme celle de M. Lefèvre, elle n'en emploie qu'un seul, qui est d'ailleurs arbitraire; elle m'a été suggérée par une observation de mon collègue M. Fouret.

Soient aa', bb' les couples de points d'intersection de la droite des points doubles avec les projections des couples de génératrices fournis dans les deux corps par un même plan auxiliaire; cc' et dd' les couples fournis par un autre plan auxiliaire.

On tracera un cercle quelconque dans le plan et l'on prendra arbitrairement un point A *sur ce cercle. On joindra ce point aux points* $a, a', b, b', c, c', d, d'$ *par des droites qui couperont le cercle en* $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta'$. *On joindra* $\alpha\alpha'$ *et* $\beta\beta'$ *qui se couperont en* ε; $\gamma\gamma'$ *et* $\delta\delta'$ *qui se couperont en* η. *La droite* $\varepsilon\eta$ *coupera le cercle en deux points* P *et* Q *qui, joints au point* A, *détermineront deux droites sur lesquelles sont les points doubles cherchés.*

Si l'on veut démontrer directement ce résultat, il suffit d'observer que les couples aa', bb' et celui des points doubles étant, d'après le théorème de Desargues, conjugués à un même couple, les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et PQ sont concourantes; de même pour $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ et PQ.

Un grand nombre des droites du tracé figurent déjà

sur l'épure, si l'on a soin, comme le fait M. Lefèvre, de faire passer le cercle arbitraire par la projection horizontale du sommet de l'un des cônes.

Remarque. — Si les deux corps ont une génératrice commune, l'un des points doubles est connu : c'est le point d'intersection de la projection de cette droite et de la droite des points doubles ; l'autre s'obtiendra donc par la règle seule comme sixième point d'une involution.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1885.

Composition de Mathématiques.

Par les deux foyers d'une ellipse fixe, on fait passer une circonférence variable :

1° A quelle condition doit satisfaire cette ellipse pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection ?

2° En chacun des points d'intersection, on mène les tangentes à l'ellipse ; ces quatre droites forment un quadrilatère : lieu des sommets de ces quadrilatères, quand le cercle varie.

3° Quel est le lieu des points d'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse ?

4° On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse : lieu de leurs points de contact avec le cercle.

Lavis.

Faire à l'encre de Chine et à teintes plates le lavis d'un cylindre terminé par deux demi-sphères. La surface du solide sera supposée dépolie. Le rayon lumineux est le rayon ordinaire à 45°.

On ne passera pas de teinte sur le fond. Les traits du cadre et les contours apparents du solide seront passés à l'encre avant de laver.

Composition de Géométrie descriptive.

Un cercle de $0^m,10$ de diamètre, situé dans le plan de front P, se projette horizontalement sur une parallèle aux petits côtés et à $0^m,11$ du bas de la feuille. Son centre se projette verticalement sur la ligne qui divise la feuille en deux parties égales dans le sens de sa longueur, à $0^m,28$ du bas. On le prend comme cercle générateur de deux tores pleins ayant pour axes les tangentes à la circonférence en son point le plus à gauche et en son point le plus haut : 1° on tracera complètement l'intersection des deux surfaces, en indiquant les constructions effectuées pour en obtenir un point quelconque et la tangente en ce point ; 2° on représentera par ses projections le solide commun aux deux tores, en retranchant la partie de ce solide située en arrière d'un plan de front, placé lui-même à $0^m,02$ en arrière du plan P.

Composition de Trigonométrie.

On donne les trois côtés d'un triangle,

$$a = 46751^m,38, \qquad b = 58047^m,29, \qquad c = 37694^m,06;$$

déterminer les trois angles, et la surface en hectares.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1885 (¹).

Composition de Mathématiques.

On donne un cercle et une tangente fixe à ce cercle. On considère une conique variable, ayant pour foyer le centre du cercle et pour directrice correspondant à ce foyer, la tangente donnée :

1° En un point d'intersection de la conique et du cercle, on prend la tangente du cercle et son second point de rencontre avec la conique. Quel est le lieu de ce point?

2° Quel est le lieu du point de contact de la conique avec une tangente commune à cette conique et au cercle?

On aura soin de distinguer, sur chacun de ces lieux géométriques, les parties pour lesquelles la conique variable est une ellipse, et les parties pour lesquelles cette conique est une hyperbole.

Composition de Géométrie descriptive.

Deux circonférences de $0^{m},16$ de diamètre, situées respectivement dans les deux plans de projection, ont leurs centres dans un même plan de profil P, et à $0^{m},16$ de la ligne de terre, l'un en avant, l'autre au-dessus de cette ligne. Chacune de ces circonférences sert de directrice à un cône dont le sommet se trouve sur l'autre circonférence en son point le plus à gauche.

(¹) Sujets donnés à quelques élèves qui n'ont pu composer que plus tard.

Les deux cônes étant supposés pleins, représenter, par ses projections sur le plan horizontal et sur le plan P, le solide qui leur est commun, en supprimant la partie de ce solide située à droite d'un plan de profil placé à $0^{m}, 02$ à gauche du plan P.

On prendra comme ligne de terre la droite joignant les milieux des grands côtés du cadre.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1885).

ÉPREUVES POUR L'ADMISSIBILITÉ.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés une sphère S et un petit cercle C de cette sphère, on propose :

1° De montrer qu'il existe deux paraboloïdes passant par le cercle C et touchant la sphère en un point M donné sur sa surface; former les équations des deux paraboloïdes ;

2° Trouver le lieu des sommets des paraboloïdes correspondant aux divers points M de la surface S ;

3° A un point M et au point M′ diamétralement opposé sur la surface de la sphère correspondent quatre paraboloïdes qui, combinés deux à deux d'une manière convenable, ont une ligne commune autre que le cercle C; déterminer la surface engendrée par cette ligne commune lorsque le diamètre MM′ prend toutes les directions possibles.

Mathématiques élémentaires.

Déterminer les angles B et C d'un triangle ABC, connaissant l'angle A, le côté opposé a et le produit ma^2

des portions BB_1, CC_1 des bissectrices intérieures comprises entre les sommets B, C et les côtés opposés AC, AB.

Résoudre le même problème lorsqu'on donne le produit ma^2 des portions BB_2, CC_2 des bissectrices extérieures comprises entre les sommets B, C et les côtés opposés; discuter les résultats obtenus, suivant les positions des points B_2 et C_2 par rapport aux sommets A et C, A et B.

Composition tirée de certaines parties, désignées à l'avance, du programme de la Licence.

Théorie. — Théorie du contact de deux surfaces. Surfaces osculatrices. Déterminer, sur une surface donnée, les points où elle peut avoir un contact du second ordre avec une sphère, et ceux où elle peut avoir un contact du troisième ordre avec une surface du second degré; montrer qu'en ces derniers points les asymptotes de l'indicatrice ont un contact du troisième ordre avec la surface donnée et que la réciproque est vraie.

Application. — On donne une parabole représentée en coordonnées rectangulaires par les équations

$$z = 0, \qquad y^2 - 2mx = 0;$$

déterminer une surface du troisième degré, symétrique par rapport au plan des xy, et admettant pour ombilics tous les points de la parabole donnée. Indiquer la forme de la surface. Déterminer les lignes asymptotiques et discuter la forme de leurs projections sur le plan de la parabole.

ÉPREUVES DÉFINITIVES.

Composition d'Analyse et de Mécanique.

Un point matériel, assujetti à se mouvoir sur une surface de révolution, est uniquement sollicité par la

force qui provient des résistances passives et qui est dirigée en sens contraire de la vitesse. Trouver les équations du mouvement du point; en déduire que la trajectoire est une ligne géodésique et qu'elle fait avec les parallèles qu'elle rencontre des angles dont le cosinus varie en raison inverse du rayon de ces parallèles.

On donne un parallèle d'une surface de révolution S et l'on considère un tube très étroit dont l'axe est dirigé suivant la ligne géodésique de S qui touche en un point A le parallèle donné. Le tube renferme un point matériel M attiré vers l'axe par une force dirigée suivant la perpendiculaire MP abaissée du point sur l'axe, et égale à $Ar + B$, A et B désignant des constantes qui ne sont dans aucun cas négatives, et r la distance MP. Quelle doit être la forme de S pour que le point M, abandonné sans vitesse à l'action de la force donnée, arrive au point A au bout d'un temps donné, quel que soit le point de départ. Discuter la forme de la méridienne de S et indiquer quelques cas où l'intégration peut s'effectuer complètement.

Épure.

Construire les projections de l'intersection d'un tore, dont l'axe est vertical, avec une sphère bitangente au tore; l'un des points de contact est situé sur le parallèle le plus élevé du tore, à l'extrémité droite de son diamètre de front.

Calcul.

Déterminer les coordonnées des pieds des normales menées par un point dont les coordonnées rectangulaires sont

$$x = 1, \qquad y = 2$$

à l'ellipse représentée par l'équation

$$x^2 + 4y^2 = 16.$$

SUJETS DE LEÇONS.

Ces sujets diffèrent très peu de ceux qui ont été traités en 1881, 1882, 1883 et 1884.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1885.

DEUXIÈME SESSION.

Géométrie analytique.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et une droite AB définie par son coefficient angulaire m et son ordonnée à l'origine b, et l'on demande :

1° De trouver la direction des diamètres des paraboles tangentes à l'axe des y au point B où il est coupé par la droite AB et ayant leurs foyers sur cette dernière droite;

2° D'écrire l'équation générale de ces courbes;

3° De construire le lieu de leurs sommets;

4° De construire le lieu des points où leurs tangentes sont parallèles à l'axe des x;

5° De construire le lieu des pôles de l'axe des x relativement aux paraboles considérées.

(En d'autres termes, par les deux points d'intersection de chaque parabole avec l'axe des x, on mène des tangentes à la courbe et l'on demande de trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes.)

Triangle.

Calculer les angles et la surface d'un triangle, connaissant les trois côtés

$$a = 2543^{\text{m}},430, \qquad b = 2332^{\text{m}},751, \qquad c = 2597^{\text{m}},808$$

Épure.

On demande de construire les *projections* et le *développement* de la partie de la *surface* des *deux nappes* d'un cône de révolution comprise entre la surface d'un cube et celle de la sphère inscrite dans ce cube; le cube et la sphère sont supposés transparents.

Le cube, dont le côté a $0^{\text{m}},100$, est situé dans le dièdre antérieur supérieur et deux de ses faces sont dans les plans de projection.

Le cône a son sommet au point le plus haut de la sphère inscrite, son axe est parallèle à la ligne de terre et son angle au sommet est de $120°$.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et du développement des lignes d'intersection et les tangentes en ces points.

Ces constructions seront *succinctement* expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur. — Géométrie descriptive.
Titre intérieur. — Intersections de surfaces.

Placer la ligne de terre à égale distance des grands côtés de la feuille, et les projections du centre du cube à $0^{\text{m}},100$ du bord gauche du cadre.

Physique.

On fait passer dans un réservoir vide d'air, mais dont les parois sont mouillées d'eau, une masse d'air du poids de $1^{kg},119$. Quand l'eau qui mouillait les parois du réservoir s'est vaporisée totalement, l'état hygrométrique de l'air mis en expérience est $\frac{3}{5}$.

Sachant que la pression reste constante dans le réservoir et égale à 750^{mm};

Que la température est 30°C.;

Que la force élastique maximum de la vapeur d'eau à 30° est $31^{mm},5$;

Que le coefficient de dilatation des gaz est $\frac{1}{273}$;

Que la densité de la vapeur d'eau est $\frac{5}{8}$;

Que le poids de 1^{lit} d'air sec à 0° et à 760^{mm} est $1^{gr},293$,

On demande :

1° Le volume occupé par l'air humide;

2° Le poids de l'eau qui s'est vaporisée.

Chimie.

I. Recherche de l'arsenic dans les cas d'empoisonnement; appareil de Marsh.

II. Quel poids de l'alliage de formule $AsZn^3$ faut-il employer pour obtenir 12^{lit} d'arséniure d'hydrogène mesurés secs sous la pression de 748^{mm} de mercure et à la température de 21°C.?

Poids du litre d'hydrogène arsénié à 0° et à 760^{mm} de pression		$3^{gr},49$
Coefficient de dilatation des gaz		0,00367
Équivalents en poids	Arsenic	75
	Hydrogène	1
	Zinc	33

THÉORÈME SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES ET LE CERCLE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

THÉORÈME. — *Le centre de gravité des points d'intersection d'une courbe algébrique de degré quelconque donnée, et d'un cercle de centre fixe, et de rayon variable, est un point fixe.*

Prenons pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires menées par le centre fixe O du cercle variable. L'équation de ce cercle sera

$$x^2+y^2=R^2, \tag{1}$$

R étant un paramètre variable; celle de la courbe algébrique pourra s'écrire

$$\sum_{i=0}^{i=n} y^i X_{n-i}=0, \tag{2}$$

X_{n-i} désignant, d'une manière générale, un polynôme du degré $n-i$ en x

$$X_{n-i}=a_{n-i}x^{n-i}+b_{n-i}x^{n-i-1}+c_{n-i}x^{n-i-2}+\ldots+l_{n-i}.$$

La démonstration du théorème exige que l'on mette en évidence la parité de n. Elle se fait, d'ailleurs, absolument de même dans l'un et l'autre cas. Pour fixer les idées, nous supposerons n pair, $n=2p$.

L'équation (2) pourra alors s'écrire, en faisant passer tous les termes à puissances impaires en y, dans le second membre,

$$\sum_{i=0}^{i=p} y^{2i} X_{2(p-i)} = -\sum_{i=0}^{i=p-1} y^{2i+1} X_{2(p-i)-1}.$$

Élevant les deux membres de cette équation au carré, nous avons

$$\sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p} y^{2(i+j)} X_{2(p-i)} X_{2(p-j)} = \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1} y^{2(i+j+1)} X_{2(p-i)-1} X_{2(p-j)-1}.$$

Éliminant y^2 entre cette équation et l'équation (1), on a

$$\sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p} (R^2 - x^2)^{i+j} X_{2(p-i)} X_{2(p-j)} = \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1} (R^2 - x^2)^{i+j+1} X_{2(p-i)-1} X_{2(p-j)-1},$$

équation aux abscisses des points d'intersection du cercle et de la courbe algébrique donnée. Calculant les coefficients des deux termes du degré le plus élevé, on trouve

$$\begin{aligned} x^{4p} \Bigg[& \sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p} (-1)^{i+j} a_{2(p-i)} a_{2(p-j)} \\ & - \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1} (-1)^{i+j} a_{2(p-i)-1} a_{2(p-j)-1} \Bigg] \\ + x^{4p-1} \Bigg\{ & \sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p} (-1)^{i+j} \left[a_{2(p-i)} b_{2(p-j)} + a_{2(p-j)} b_{2(p-i)} \right] \\ & - \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1} (-1)^{i+j} \left[a_{2(p-i)-1} b_{2(p-j)-1} + a_{2(p-j)-1} b_{2(p-i)-1} \right] \Bigg\} + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de ces termes sont indépendants du paramètre variable R; on verrait de même qu'il en est ainsi pour l'équation en y : le théorème est donc démontré.

Transformant ce théorème par polaires réciproques, en prenant pour conique directrice un cercle concentrique au cercle de rayon variable, on a ce théorème corrélatif :

La polaire d'un point par rapport aux tangentes communes à un cercle de rayon variable, ayant ce point pour centre, et à une courbe algébrique de degré quelconque, donnée, est une droite fixe.

La transformation par rayons vecteurs réciproques donne cet autre théorème :

Le centre harmonique, relativement à un point, des points d'intersection d'un cercle de rayon variable ayant ce point pour centre et d'une courbe algébrique, de degré quelconque, donnée, est un point fixe.

Le théorème qui vient d'être démontré est particulièrement intéressant dans le cas des coniques.

Si l'on rapporte une conique à centre à ses axes Ox et Oy,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et qu'on coupe cette conique par un cercle de centre ω,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

on a, pour l'équation aux abscisses des points d'intersection de ces deux courbes,

$$(a^2-b^2)^2x^4 - 4\alpha a^2(a^2-b^2)x^3 + \ldots = 0.$$

Si donc (X, Y) est le centre de gravité G de ces points d'intersection, on a

$$X = \frac{\alpha a^2}{c^2}. \tag{3}$$

On trouverait de même

$$Y = -\frac{\beta b^2}{c^2}. \tag{4}$$

Si l'on rapproche ces formules de celles qui ont été données, dans les *Nouvelles Annales,* même tome, p. 159, par M. R. Godefroy, on voit que, si (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont les centres des systèmes de cordes communes au cercle et à la conique, on a

$$x_1 x_2 x_3 = a^2 \mathrm{X}, \qquad y_1 y_2 y_3 = b^2 \mathrm{Y}.$$

Des formules (3) et (4) on déduit les suivantes :

$$\frac{\mathrm{X}}{\alpha} + \frac{\mathrm{Y}}{\beta} = 1,$$

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\beta}{\alpha},$$

qui montrent que *le point* G *est à la rencontre de la droite qui joint les projections du centre* ω *du cercle, sur les axes* Ox *et* Oy *de la conique, et du diamètre conjugué, dans cette conique, de la symétrique de la droite* Oω *par rapport à la bissectrice de l'angle* xOy.

Le théorème précédent est susceptible de diverses applications :

Veut-on, par exemple, connaître le point P où la conique est rencontrée par le cercle osculateur en un de ses points que nous appellerons M? Soit ω le centre de courbure répondant au point M. Du point ω nous déduisons, par le moyen qui vient d'être indiqué, le point G. Le point P se trouve sur la droite MG, prolongée du côté du point G, de la longueur GP = 3 MG.

Nous nous bornerons là. Le lecteur apercevra facilement d'autres applications du théorème énoncé dans cette Note.

PROBLÈME.

I. Trouver l'équation générale des cylindres du second degré passant par les six sommets d'un octaèdre régulier.

II. Parmi ces cylindres, trouver celui dont les génératrices rectilignes ont une direction donnée.

III. Sur la sphère circonscrite à l'octaèdre, les quatre grands cercles, dont les plans sont parallèles aux faces, déterminent huit triangles et six quadrilatères. Si le rayon parallèle aux génératrices du cylindre perce la sphère dans un triangle, le cylindre est elliptique; s'il la perce dans un quadrilatère, le cylindre est hyperbolique.

IV. Dans le dernier cas, la répartition des sommets de l'octaèdre sur les deux nappes du cylindre se distingue de la manière suivante. Les six sommets sont sur trois grands cercles dont chacun en contient quatre. Un quelconque des six quadrilatères a pour diagonales deux de ces grands cercles, qui le partagent en quatre triangles, ayant pour sommet commun un sommet A de l'octaèdre. L'extrémité du rayon parallèle aux génératrices, étant dans le quadrilatère, se trouve dans un de ces quatre triangles. En prolongeant les deux grands cercles diagonaux, qui sont côtés de ce triangle, au delà du sommet A, et prenant sur chacun d'eux le sommet de l'octaèdre le plus voisin qu'on y rencontre, on a les deux sommets qui, avec A, sont sur une même nappe du cylindre. Les trois autres sommets sont sur l'autre nappe.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. d'Ocagne. — J'ai remarqué autrefois la formule (3) de l'intéressant Mémoire *Sur les lignes de poursuite* de M. Cesaro, contenu dans le numéro de février, p. 66, et j'ai donné, aux notations près, cette formule dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XI, p. 134; 1883), en en déduisant le théorème que voici :

Si, par chacun des deux points (l'un poursuivant, l'autre poursuivi), on abaisse une perpendiculaire sur la vitesse de l'autre, les droites ainsi menées se coupent en un point. La perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de la résultante des deux vitesses passe par le centre de courbure de la courbe de poursuite.

Extrait d'une Lettre de M. F. Dumont, professeur au lycée de Bourg. — On remarque, dans le numéro de février 1886 du *Bulletin des Sciences mathématiques*, l'analyse d'un Ouvrage allemand contenant des applications d'un nouveau système de coordonnées *dit* de Schwering.

Ce système, vrai réciproque de celui de Descartes, et dont M. d'Ocagne a récemment donné, dans votre Journal, d'intéressantes applications, n'est pas d'origine étrangère. Le système des coordonnées parallèles a, en effet, été indiqué par Chasles dans son *Mémoire sur le principe de dualité* (p. 635, n° 86), et il le donne immédiatement pour l'espace en ayant soin d'indiquer sa parfaite correspondance avec le système de Descartes, celui-ci étant le système de coordonnées tétraédriques

lorsqu'une face du tétraèdre est à l'infini, l'autre le système de coordonnées tétraédriques du plan lorsque l'un des sommets du tétraèdre s'éloigne à l'infini.

Le nouveau système, qui mériterait de porter un nom français, celui de Chasles, a donc été proposé, et avec toute la généralité possible, en 1837 ; et il ne restait pas même à démontrer, comme Victor Schlegel l'a fait, paraît-il, sa parfaite correspondance avec le système cartésien.

BIBLIOGRAPHIE.

Sur l'histoire des Sciences mathématiques et physiques de M. Maximilien Marie. Extrait de trois Lettres adressées à M. G. Eneström par *B. Boncompagni*.

Cette Brochure contient cinq pages de texte et deux de renvois. Elle paraît avoir pour objet de faire savoir au public que M. Marie, dans son *Histoire*, n'a pas mentionné toutes les découvertes du prince Boncompagni. L'excuse de M. Marie est peut-être que ces découvertes sont trop nombreuses. Le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* l'emporte en effet, de beaucoup, en poids et en volume, sur l'*Histoire des Mathématiques* de M. Marie; or, quand le contenant est moindre que le contenu, il faut bien, comme dit Euclide, laisser perdre le reste.

M. Boncompagni adresse à M. Marie une critique présentée de telle sorte que le lecteur pourrait y voir une insinuation calomnieuse; mais il arrive souvent qu'un écrivain soit mené par sa phrase là où il ne songeait pas à aller. M. Boncompagni dit :

« Le P. Pierre Cossali, dans le tome II, publié en 1799, de son Ouvrage bien connu sur l'*Histoire de l'Algèbre*, a remarqué que, dans l'*Algebra* de Bombelli, « *piu di meno a* » si-

gnifie $a\sqrt{-1}$ et « *meno di meno a* » $-a\sqrt{-1}$. Si M. Marie avait bien voulu jeter les yeux sur les pages 285 et 286 du tome II de cet Ouvrage de Cossali, il aurait pu s'épargner des conjectures inadmissibles sur « p. di m. » et « m. di m. ». Di n'est pas une abréviation, c'est un mot italien qui équivaut à de. »

1° Le secours du P. Cossali n'était nécessaire à personne pour interpréter les expressions employées par Bombelli, quelles qu'elles fussent, dans une question aussi simple, aujourd'hui, que celle de la résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$; et si M. Boncompagni avait bien voulu lire plus attentivement les pages 305 et suivantes du tome II de l'*Histoire des Sciences mathématiques et physiques,* sur lesquelles il base son accusation, il y aurait vu que M. Marie avait trouvé sans aucune aide... une chose qui saute aux yeux.

2° M. Boncompagni se laisse évidemment entraîner par sa plume, lorsqu'il reproche à M. Marie des conjectures sur les expressions *piu di meno* et *meno di meno*, employées, à ce qu'il paraît, par Bombelli, dans son *Algebra;* car M. Marie, dans son étude sur Cardan, dit à propos du *Sermo de plus et minus,* qui contient l'analyse de la solution, par Bombelli, du cas irréductible : « Nous utiliserons ce *sermo* dans notre étude sur Bombelli *dont nous n'avons pas l'Algèbre* »; et c'est en effet d'après Cardan que M. Marie résume la découverte de Bombelli relativement au cas irréductible.

M. Marie ne fait aucune conjecture au sujet des expressions *piu di meno* et *meno di meno,* attendu qu'il ne les connaît même pas; il parle des expressions *plus di minus* et *minus di minus* qu'il a trouvées dans Cardan.

3° *Plus di minus* et *minus di minus,* pour n'être pas d'un très bon latin, n'en sont pas moins du latin. Par conséquent, *di,* qui peut être italien dans *Bullettino di bibliografia,* etc., ne l'est certainement pas dans *plus di minus,* et M. Boncompagni aurait pu réserver pour une meilleure occasion la leçon d'italien qu'il voulait bien donner à M. Marie.

4° Le mot LATIN *di* n'étant pas d'un latin très intelligible, il semble que M. Marie ait pu, sans transgresser aucune loi, ni divine, ni humaine, se demander, en passant, dans une parenthèse, s'il n'y fallait pas voir une abréviation et si *di minus* ne devait pas être traduit par *deux fois négatif,* c'est-à-dire négatif même au carré.

5° *Di meno* et *di minus* manquant également de clarté, on pouvait, sans blesser aucune convenance, les traduire l'un et l'autre par *négatif même au carré,* puisque c'est la propriété caractéristique commune des choses qui sont *di meno* ou *di minus.*

M. Boncompagni, après avoir relevé quelques erreurs, suivant lui, de dates et de lieux de naissance ou de mort, et quelques omissions commises par M. Marie (quant aux omissions, il y aurait lieu de tenir compte de l'axiome d'Euclide), termine par ces mots :

« Ces citations me paraissent suffisantes pour prouver que l'Ouvrage de M. Marie ne peut pas donner une idée complète et exacte de l'*Histoire des Sciences mathématiques.* »

Mon Dieu! il y a plusieurs manières de comprendre l'histoire des Sciences. Par exemple, il n'est pas douteux que, dans 10000 ans d'ici, un grand nombre d'historiens estimables verront un intérêt de premier ordre à rechercher pourquoi M. Boncompagni, qui n'aurait même pas eu à prendre la peine d'aller porter à Rome ses griefs contre M. Marie, a tenu à en faire le sujet de trois épîtres aux Scandinaves, pourquoi le destinataire de ces épîtres, M. Eneström, en a fait des extraits choisis, pourquoi ces extraits ont été imprimés à Stockholm, pourquoi les exemplaires de cette importante Brochure sont retournés à Rome et s'y sont fait enrichir d'*Hommages de l'auteur,* etc., etc. Il est certain, disons-nous, que ces questions passionneront les directeurs des *Bullettino* de l'époque; mais elles laisseront froides beaucoup d'autres personnes, et peut-être se trouvera-t-il alors un autre M. Marie capable d'une telle apathie.

M. Marie.

QUESTIONS.

1561. Dans une parabole, le foyer, le point où la tangente en un point de la courbe coupe la directrice, le milieu du rayon de courbure issu du point M sont en ligne droite. (J. Marchand.)

1582. Soient donnés deux points P, P_1 au plan d'un triangle ABC, et l'on désigne les points d'intersection

$$(PA, BC) = a, \qquad (P_1A, BC) = a_1,$$
$$(PB, CA) = b, \qquad (P_1B, CA) = b_1,$$
$$(PC, AB) = c, \qquad (P_1C, AB) = c_1.$$

$$(bc_1, cb_1) = A_1, \qquad (bc, b_1c_1) = A_2,$$
$$(ca_1, ac_1) = B_1, \qquad (ca, c_1a_1) = B_2,$$
$$(ab_1, ba_1) = C_1, \qquad (ab, a_1b_1) = C_2.$$

Les cinq points

$$P, \quad P_1, \quad A_1, \quad B_1, \quad C_1$$

sont en ligne droite.

Les quatre points

A, A_1, B_2, C_2 sont en ligne droite.
B, B_1, C_2, A_2 »
C, C_1, A_2, B_2 »

Les trois droites

AA_2, BB_2, CC_2 concourent au même point O,
aA_2, bB_2, cC_2 » » Q,
a_1A_2, b_1B_2, c_1C_2 » » R.

Les huit points

$$a, \quad b, \quad c; \quad a_1, \quad b_1, \quad c_1; \quad Q, \quad R$$

sont situés sur une conique, etc. (H. SCHROETER.)

ERRATA.

P. 107, ligne 6, en remontant, *au lieu de* $>$, *lisez* $<$.
P. 108, ligne 10, après le radical, *au lieu de* $+$, *lisez* $-$.

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER;

Par M. E. CESARO.

I. — Nombres de Bernoulli.

1. Les nombres

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad B_6 = \tfrac{1}{42},$$
$$B_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad \ldots, \quad B_1 = \tfrac{1}{2}, \quad B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \ldots = 0,$$

appelés *nombres de Bernoulli*, sont *définis* par l'égalité symbolique

$$(B+1)^\nu - B^\nu = \nu \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

qui engendre, en vertu du théorème de Taylor, la relation symbolique générale

$$(1) \qquad f(x+B+1) - f(x+B) = f'(x+1).$$

On en déduit immédiatement la *formule sommatoire de Maclaurin*

$$(2) \quad f'(1) + f'(2) + f'(3) + \ldots + f'(n) = f(n+B) - f(B),$$

qui permet d'effectuer de très avantageuses transformations de séries, pourvu que l'on ait soin de considérer toujours des fonctions développables par la formule de Taylor, sans quoi on serait souvent conduit à des conclusions paradoxales. L'emploi de la formule (2) donne ordinairement lieu à des séries divergentes, qui, cependant, ne perdent leur convergence qu'à partir d'un certain terme, de sorte qu'on peut [1] toujours les utiliser

[1] « ... Aujourd'hui bien s'en faut qu'on approuve l'usage des séries non convergentes; au contraire, on veut qu'elles soient complètement bannies de l'Analyse. Mais cette rigueur, juste et raison-

pour représenter, avec une certaine approximation, les sommes que l'on cherche à transformer. On sait que la recherche du *maximum* d'approximation a été l'objet de plusieurs travaux remarquables ([1]).

2. Une des plus intéressantes applications de la formule (2) est l'évaluation approchée de la *série de Lambert* ([2]). Rappelons d'abord que la formule (1) donne

$$e^{(B+1)x} - e^{Bx} = x e^{x};$$

d'où ([3])

$$(3) \qquad \frac{x e^{x}}{e^{x}-1} = e^{Bx} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} x^\nu,$$

ν étant la variable entière dans cette somme et dans toutes celles qui suivent. On en déduit, par intégration,

$$(4) \qquad \log \frac{x e^{x}}{e^{x}-1} = x - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} \frac{x^\nu}{\nu} = \frac{x}{2} - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{x^{2\nu}}{2\nu}.$$

---

nable en elle-même, a été mise à une bien dure épreuve par la série de Stirling. D'une part divergente, comme elle l'est, elle *devait,* en effet, être rejetée; d'autre part, parce qu'elle est presque indispensable, elle *ne peut point* l'être .... » (Malmstén, *Journal de Crelle*, p. 55; 1847.)

([1]) Consulter, pour certains cas particuliers, les recherches de Limbourg et de Chio, dans les Mémoires des Académies de Bruxelles et de Turin (1860 et 1870). Voir aussi la thèse de M. Bourguet, *Sur le calcul des intégrales eulériennes.* Du reste, le sujet dont il s'agit, traité depuis longtemps par Erchinger, d'une manière générale, a été repris par Lagrange, par Malmstén, par Poisson dans le Mémoire : *Sur le calcul numérique des intégrales définies*, et par beaucoup d'autres. Consulter aussi le travail de Dienger, *Ueber die Lagrangesche Summirungsformel* (*Crelle,* p. 75; 1846), et celui de Jacobi, *De usu legitimo formulæ summatoriæ Maclaurinianæ* (*Crelle,* t. 12, p. 263).

([2]) Question résolue par Schlömilch, dans une lettre adressée à Liouville (*Journal de Liouville,* p. 101; 1863).

([3]) Pour se convaincre que ces déductions sont parfaitement légitimes, consulter notre article : *Principes du calcul symbolique* (*Mathesis*, p. 10; 1883).

On sait, du reste, que la formule (3) en engendre une infinité d'autres, fort remarquables. Par exemple, le simple changement de x en $\frac{x}{2}\sqrt{-1}$ donne

$$(5) \qquad \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \cos(\mathrm{B}x) = 1 - \sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}.$$

Ensuite, en tenant compte des identités

$$\cot\frac{x}{2} - \cot x = \operatorname{cos\acute{e}c} x, \qquad \cot x - 2\cot 2x = \operatorname{tang} x,$$

on obtient

$$(6) \qquad \frac{x}{\sin x} = 1 - \sum_1^\infty (-1)^\nu (2^{2\nu} - 2)\frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu},$$

$$(7) \qquad \operatorname{tang} x = \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1} 4^\nu(4^\nu - 1)\frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu-1};$$

. . . .

3. Cela posé, appliquons la formule (2) à la série dont le terme général est

$$f(n) = \frac{1}{n} - \frac{x^n}{1-x^n}\log\frac{1}{x} \qquad (\bmod x < 1).$$

Nous obtenons immédiatement

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{\nu} - \frac{x^\nu}{1-x^\nu}\log\frac{1}{x}\right) = \log\frac{n+\mathrm{B}}{1-x^{n+\mathrm{B}}} - \log\frac{\mathrm{B}}{1-x^{\mathrm{B}}}.$$

En particulier, pour $x = 0$, nous trouvons la formule connue

$$\sum_1^n \frac{1}{\nu} = \log(n+\mathrm{B}) - \log\mathrm{B} = \mathrm{C} + \log n + \frac{1}{2n} - \sum_1^\infty \frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{2\nu\, n^{2\nu}},$$

où C désigne la *constante d'Euler*, 0,5772..., symboliquement représentée par $-\log\mathrm{B}$. Soustrayons

membre à membre les deux dernières égalités, puis faisons croître n indéfiniment, en posant $x = e^{-t}$. Il vient

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^\nu}{1 - x^\nu} = \frac{C - \log t}{t} + \frac{1}{t} \log \frac{B t e^{Bt}}{e^{Bt} - 1}$$

ou bien, en ayant égard à (4),

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^\nu}{1 - x^\nu} = \frac{C - \log t}{t} + \frac{1}{4} - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}^2}{(2\nu)!\, 2\nu} t^{2\nu - 1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \dots$$
$$= \frac{C - \log \log \frac{1}{x}}{\log \frac{1}{x}} + \frac{1}{4} - \frac{\log \frac{1}{x}}{144} - \frac{\left(\log \frac{1}{x}\right)^3}{86400} - \frac{\left(\log \frac{1}{x}\right)^5}{7620480} - \dots \text{ (1)}.$$

4. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles montre que, si l'on pose

$$f(x) = (1 - a_1 x)(1 - a_2 x)(1 - a_3 x)(1 - a_4 x) \dots,$$

les nombres a étant différents entre eux, le coefficient A_p de x^p, dans le développement de $\frac{1}{f(x)}$, est (2)

$$(8) \qquad A_p = - \left[\frac{a_1^{p+1}}{f'\left(\frac{1}{a_1}\right)} + \frac{a_2^{p+1}}{f'\left(\frac{1}{a_2}\right)} + \frac{a_3^{p+1}}{f'\left(\frac{1}{a_3}\right)} + \dots \right].$$

Or, en vertu d'une formule d'Euler, que l'on sait éta-

---

(1) Schlömilch fait remarquer que cette formule est surtout avantageuse pour les valeurs de x très voisines de l'unité, c'est-à-dire précisément dans le cas où la *transformation de Clausen* ne pourrait être employée avec fruit.

(2) Voir, par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Catalan, p. 318.

blir élémentairement (¹), on peut prendre

$$a_\nu = \frac{1}{\nu^2}, \qquad f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}},$$

tandis que, d'autre part, l'égalité (6) donne

$$\frac{\pi\sqrt{x}}{\sin(\pi\sqrt{x})} = 2\cos(B\pi\sqrt{x}) - \cos(2B\pi\sqrt{x});$$

d'où

$$A_p = (-1)^{p-1}\frac{(2^{2p}-2)B_{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}.$$

Par suite, la formule (8) devient

$$\frac{1}{1^{2p}} - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} - \frac{1}{4^{2p}} + \ldots = (-1)^{p-1}\frac{(2^{2p-1}-1)B_{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}.$$

On en déduit immédiatement

$$(9) \qquad \frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \ldots = (-1)^{p-1}\frac{2^{2p-1}B_{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}.$$

II. — Nombres d'Euler.

5. *Les nombres d'Euler*

$$E_0 = 1, \qquad E_2 = -1, \qquad E_4 = 5, \qquad E_6 = -61,$$
$$E_8 = 1385, \qquad \ldots, \qquad E_1 = E_3 = E_5 = E_7 = E_9 = \ldots = 0,$$

définis par l'égalité symbolique

$$(E+1)^\nu + (E-1)^\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots),$$

obéissent à la relation symbolique, plus générale,

$$(10) \qquad f(x+E+1) + f(x+E-1) = 2f(x);$$

(¹) La démonstration la plus directe est fournie par la théorie des fonctions holomorphes (*Cours* de M. Hermite, p. 70). Au point de vue de ce qui va suivre, il importe seulement que l'on sache démontrer la formule d'Euler sans recourir aux intégrales définies.

d'où l'on déduit

$$(11)\quad f(1)-f(3)+f(5)-\ldots\mp f(2n-1)=\tfrac{1}{2}[f(\mathrm{E})\pm f(\mathrm{E}+2n)].$$

Afin d'appliquer cette formule au cas de

$$f(n)=\frac{x^n}{1+x^{2n}},$$

remarquons d'abord que la relation (10) donne, en particulier,

$$(12)\qquad \frac{2}{e^x+e^{-x}}=e^{\mathrm{E}x}=1+\sum_1^\infty \frac{\mathrm{E}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}.$$

Cela étant, le second membre de (11) devient, pour n infini et $x=e^{-t}$,

$$\frac{1}{2(e^{\mathrm{E}t}+e^{-\mathrm{E}t})}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sum_1^\infty \frac{\mathrm{E}_{2\nu}^2}{(2\nu)!}t^{2\nu},$$

pourvu que l'on ait égard à (12). On a donc

$$\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^3}{1+x^6}+\frac{x^5}{1+x^{10}}-\frac{x^7}{1+x^{14}}+\ldots$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\log\frac{1}{x}\right)^2+\frac{25}{96}\left(\log\frac{1}{x}\right)^4+\frac{3721}{2880}\left(\log\frac{1}{x}\right)^6+\ldots.$$

6. On a, de même,

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}-\dfrac{3x^3}{1-x^3}+\ldots\mp\dfrac{(2n-1)x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} \\ \quad =\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{E}x^{\mathrm{E}}}{1-x^{\mathrm{E}}}\pm\dfrac{(\mathrm{E}+2n)x^{\mathrm{E}+2n}}{1-x^{\mathrm{E}+2n}}\right].\end{cases}$$

Or il est clair, en vertu de (3), que

$$\frac{\mathrm{E}t}{e^{\mathrm{E}t}-1}=1+\sum_1^\infty \frac{\mathrm{B}_{2\nu}\mathrm{E}_{2\nu}}{(2\nu)!}t^{2\nu}.$$

D'après cela, le second membre de (13) devient

$$\frac{1}{2\log\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{\mathrm{B}_{2\nu}\mathrm{E}_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\nu-1},$$

lorsque n croît sans limite. Conséquemment,

$$\frac{x}{1-x} - \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} - \frac{7x^7}{1-x^7} + \dots$$
$$= \frac{1}{2\log\frac{1}{x}} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{x} + \frac{1}{288}\left(\log\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{61}{604800}\left(\log\frac{1}{x}\right)^5 + \dots$$

7. Il vaudrait peut-être mieux substituer, aux nombres d'Euler, les nombres E′ définis par l'égalité symbolique

$$(E'+1)^\nu + (E'-1)^\nu = 2 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \dots).$$

On trouve, de proche en proche,

$$E'_0 = 1, \qquad E'_2 = E'_4 = E'_6 = E'_8 = \dots = 0,$$
$$E'_1 = 1, \quad E'_3 = -2, \quad E'_5 = 16, \quad E'_7 = -272, \quad E'_9 = 7936, \quad \dots.$$

Ces nombres forment, pour ainsi dire, un trait d'union entre les séries des nombres B et E. On a, d'une part,

$$E'_p = \frac{2^{p+1}(2^{p+1}-1)}{p+1} B_{p+1}.$$

D'autre part, on démontre sans peine que

$$E'_p = -\Delta^p(E_0), \qquad E_p = \Delta^p(E'_0).$$

Pour arriver à ces résultats, il suffit de remarquer, d'une manière générale, que les nombres ε et les nombres β, définis respectivement par les égalités

$$(\varepsilon+1)^\nu + (\varepsilon-1)^\nu = 2u_\nu, \qquad (\beta+1)^\nu - \beta^\nu = \nu u_{\nu-1},$$

sont donnés par les formules symboliques

$$\varepsilon_p = (E+u)^p, \qquad \beta_p = (B+u-1)^p.$$

Afin de ne pas donner lieu à des malentendus [1], nous

---

[1] Si nous ne nous sommes pas laissé guider par la même considération, en ce qui concerne les nombres de Bernoulli, c'est que déjà

continuerons à appeler *nombres d'Euler* les nombres E, tels qu'ils ont été définis en commençant.

8. Remarquons enfin que, d'après un corollaire de la formule d'Euler, citée au n° 4, il est permis de prendre, dans (8),

$$a_\nu = \frac{1}{(2\nu - 1)^2}, \qquad f(x) = \cos\frac{\pi\sqrt{x}}{2},$$

tandis que, d'autre part, en vertu des développements qui précèdent, on a

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi\sqrt{x}}{2}} = \cos\left(\frac{E\pi}{2}\sqrt{x}\right);$$

d'où

$$A_p = (-1)^p \frac{E_{2p}}{(2p)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p}.$$

La formule (8) devient donc

$$(14)\qquad 1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \ldots = (-1)^p \frac{E_{2p}}{(2p)!}\,\frac{\pi^{2p+1}}{4^{p+1}}.$$

III. — Nombres ultra-bernoulliens.

9. *Les nombres ultra-bernoulliens* [1] sont définis par l'égalité symbolique

$$(\mathfrak{B} + 1)^\nu - a\mathfrak{B}^\nu = \nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

a étant une constante. On ne retrouve pas, pour $a = 1$, les nombres de Bernoulli, parce que la valeur initiale $\mathfrak{B}_0$

---

trois définitions (Serret, Lacroix, Lucas) avaient été proposées, présentant toutes quelque défaut au point de vue de certaines exigences du calcul symbolique.

[1] Ainsi appelés par Trudi (*Atti dell' Accademia di Napoli*, 1865).

diffère nécessairement de $B_0 = 1$. On a, en effet,

$$(1-a)\mathfrak{B}_0 = 0;$$

d'où

$$\mathfrak{B}_0 = 0 \quad \text{si} \quad a \gtrless 1.$$

On obtient ensuite, de proche en proche,

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{1-a}, \qquad \mathfrak{B}_3 = \frac{3a(1+a)}{(1-a)^3}, \qquad \ldots,$$

$$\mathfrak{B}_2 = -\frac{2a}{(1-a)^2}, \qquad \mathfrak{B}_5 = -\frac{4a(1+4a+a^2)}{(1-a)^4}, \qquad \ldots.$$

Il est évident que l'égalité de définition est un cas particulier de l'identité symbolique générale

$$(15) \qquad f(x+\mathfrak{B}+1) - af(x+\mathfrak{B}) = f'(x+1),$$

qui engendre, à son tour, la formule

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & z f'(1) + z^2 f'(2) + z^3 f'(3) + \ldots + z^n f'(n) \\ & \quad = z^n f(n+\mathfrak{B}) - f(\mathfrak{B}), \end{aligned} \right.$$

z étant l'inverse de a.

10. Soit, par exemple, $f'(x) = x^{p-1}$. Il vient

$$\begin{aligned} & 1^{p-1} z + 2^{p-1} z^2 + 3^{p-1} z^3 + \ldots + n^{p-1} z^n \\ & \quad = \frac{1}{p}\left[z^n (n+\mathfrak{B})^p - \mathfrak{B}^p \right]. \end{aligned}$$

Puis, pour n indéfiniment croissant, et $\operatorname{mod} z < 1$, on voit que la signification des nombres ultra-bernoulliens est établie par l'égalité

$$(17) \qquad \mathfrak{B}_p = -p(1^{p-1}z + 2^{p-1}z^2 + 3^{p-1}z^3 + 4^{p-1}z^4 + \ldots) \text{ [1]},$$

qui pourrait servir à généraliser encore la notion des nombres $\mathfrak{B}$, en supposant que ceux-ci soient des fonctions de la variable *continue* p. Mais on peut donner, des

---

(1) Ces séries ont été étudiées par M. Catalan, dans le Mémoire : *Sur une suite de polynômes entiers* (Académie de Belgique, 1880).

mêmes nombres, une autre interprétation. On déduit, en effet, de l'identité (15)

$$(18) \qquad \frac{x\,e^x}{e^x - a} = e^{\mathfrak{B}x} = \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu\,!}\,x^\nu.$$

Cette propriété a été prise comme définition par Trudi ([1]). L'emploi des imaginaires donne lieu aux développements

$$(19) \qquad \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{\mathfrak{B}_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\,x^{2\nu},$$

$$\frac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_1^\infty (-1)^\nu \frac{\mathfrak{B}_{2\nu}}{(2\nu)!}\,x^{2\nu-1},$$

et à une foule d'autres, dont quelques-uns ont une certaine importance en Astronomie. Voici encore une conséquence de l'égalité (18). On a

$$(1+t)^{\mathfrak{B}} = e^{\mathfrak{B}\log(1+t)} = \frac{\log(1+t)}{1 - \dfrac{a}{1+t}},$$

d'où, en égalant les coefficients de t^p dans les développements des deux membres,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{B}-1)(\mathfrak{B}-2)\ldots(\mathfrak{B}-p+1)$$
$$= (-1)^{p+1}p\,!\left\{\frac{1}{p} + \frac{a}{(1-a)^{p+1}}\left[\frac{1-a}{1} + \frac{(1-a)^2}{2} + \ldots + \frac{(1-a)^p}{p}\right]\right\}.$$

Cette formule n'est pas applicable au cas de $a = 1$. On trouve, du reste, par un procédé analogue,

$$B(B-1)(B-2)\ldots(B-p+1) = (-1)^{p-1}\frac{(p-1)!}{p+1}.$$

([1]) Il est vrai que les nombres ultra-bernoulliens de Trudi diffèrent quelque peu des nôtres. La *fonction générale* adoptée par Trudi est, en effet, $\dfrac{1}{1 - ae^x}$.

11. Les nombres $\mathfrak{B}$ sont, en définitive, des fonctions de z. On a, en particulier,

$$\mathfrak{B}_p(1) = B_p, \qquad \mathfrak{B}_p(-1) = (2^p - 1)B_p.$$

La dernière égalité est un cas particulier de la relation

$$\mathfrak{B}_p(z) + \mathfrak{B}_p(-z) = 2^p \mathfrak{B}_p(z^2),$$

que l'on déduit aisément de la formule (17). Parmi tous les nombres ultra-bernoulliens, ceux qui répondent à l'hypothèse $z = -1$ sont tout aussi remarquables que les nombres de Bernoulli. En les doublant, on obtient une suite de nombres entiers 0, 1, 1, 0, -1, 0, 3, 0, -17, ..., étroitement liés aux nombres d'Euler; car, à cause de

$$\frac{x e^x}{e^x + 1} = e^{x\mathfrak{B}(-1)}, \qquad \frac{2}{e^x - e^{-x}} = e^{Ex},$$

on a

$$e^{2x\mathfrak{B}(-1)} = x e^{(E+1)x};$$

d'où

$$\mathfrak{B}_p(-1) = \frac{p}{2}\left(\frac{E+1}{2}\right)^{p-1}.$$

12. Il est possible d'exprimer les nombres $\mathfrak{B}$, en fonction de z, sous forme finie. Posons, à cet effet,

$$u_\nu = \nu^{p-1}, \qquad \Delta_\nu = \Delta^\nu(0^{p-1}).$$

La formule (17) devient

$$-\frac{\mathfrak{B}_p(z)}{p} = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots.$$

Or le second membre est symboliquement égal à

$$\frac{1}{1 - uz} = \frac{1}{1 - z - z\Delta} = \frac{\Delta_0}{1 - z} + \frac{z\Delta_1}{(1 - z)^2} + \frac{z^2\Delta_2}{(1 - z)^3} + \dots.$$

En conséquence,

$$\mathfrak{B}_p(z) = -p\left[\frac{z\Delta(0^{p-1})}{(1 - z)^2} + \frac{z^2\Delta^2(0^{p-1})}{(1 - z)^3} + \frac{z^3\Delta^3(0^{p-1})}{(1 - z)^4} + \dots\right].$$

Si, par exemple, $z = -1$, on trouve

$$B_p = \frac{p}{2^p - 1}\left[\frac{\Delta(0^{p-1})}{2^2} - \frac{\Delta^2(0^{p-1})}{2^3} + \frac{\Delta^3(0^{p-1})}{2^4} - \ldots\right].$$

13. Pour une forme *donnée* de la fonction f, la relation (16) peut être considérée comme une généralisation de (2). Au lieu d'employer la première de ces formules, nous préférons appliquer la formule (2) à la transformation de certaines séries, plus générales que celle de Lambert. On a

$$\left(\log\frac{1}{x}\right)\sum_1^n \frac{ax^\nu}{1 - ax^\nu} = \log\frac{1}{1 - ax^{B}} - \log\frac{1}{1 - ax^{n+B}}.$$

Donc, pour n indéfiniment croissant et $x = e^{-t}$,

$$\sum_1^\infty \frac{ax^\nu}{1 - ax^\nu} = \frac{1}{t}\log\frac{e^{Bt}}{e^{Bt} - a}.$$

Or il est facile de voir que

$$\log\frac{e^x}{e^x - a} = \log\frac{1}{1 - a} + x - \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu!}\,\frac{x^\nu}{\nu}.$$

Par conséquent,

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^\infty \frac{ax^\nu}{1 - ax^\nu} = \sum_1^\infty \frac{a^\nu x^\nu}{1 - x^\nu} \\ \displaystyle\qquad = \frac{\log\dfrac{1}{1 - a}}{\log\dfrac{1}{x}} - \frac{a}{2(1 - a)} - \sum_1^\infty \frac{B_{2\nu}\mathfrak{B}_{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\nu - 1}. \end{cases}$$

En particulier,

$$\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{1 + x^\nu} = \frac{\log 2}{\log\dfrac{1}{x}} - \frac{1}{4} + \sum_1^\infty \frac{(4^\nu - 1)B_{2\nu}^2}{(2\nu)!\,2\nu}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\nu - 1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}+\frac{x^4}{1+x^4}+\ldots$$
$$=\frac{\log 2}{\log\frac{1}{x}}-\frac{1}{4}+\frac{\log\frac{1}{x}}{48}+\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^3}{5760}+\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^5}{120960}+\ldots.$$

On obtiendrait des résultats plus généraux en faisant usage de la formule (16).

14. Il y a une liaison simple entre deux séries quelconques de nombres ultra-bernoullіens. Soit, en effet, $1 = az = \alpha\zeta$. On a

$$e^{x\mathfrak{B}(z)}=\frac{xe^x}{e^x-a}=\frac{xe^{x+\log\frac{\alpha}{a}}}{e^{x+\log\frac{\alpha}{a}}-\alpha}=\frac{x}{x+\log\frac{z}{\zeta}}\,e^{\left(x+\log\frac{z}{\zeta}\right)\mathfrak{B}(\zeta)};$$

d'où, en égalant les coefficients de x^p dans les deux membres,

$$\frac{\mathfrak{B}_p(z)}{p}=\sum_0^\infty\frac{\mathfrak{B}_{p+\nu}(\zeta)}{p+\nu}\,\frac{\left(\log\frac{z}{\zeta}\right)^\nu}{\nu!}.$$

En particulier,

$$\frac{\mathfrak{B}_p(-z)}{p}=\sum_0^\infty\frac{(2^{p+\nu}-1)B_{p+\nu}}{\nu!\,(p+\nu)}(\log z)^\nu. \tag{21}$$

C'est ainsi que tout nombre ultra-bernoullien peut être représenté au moyen des nombres de Bernoulli, proprement dits.

IV. — Nombres ultra-eulériens.

15. *Les nombres ultra-eulériens* sont définis par l'égalité symbolique

$$(\mathfrak{E}+1)^\nu+a(\mathfrak{E}-1)^\nu=0 \qquad (\nu=1,2,3,4,5,\ldots$$

avec la condition initiale $\mathfrak{E}_0 = 1$, sauf pour $a = -1$. On a, plus généralement,

$$(22) \qquad f(x+\mathfrak{E}+1) + a f(x+\mathfrak{E}-1) = (1+a) f(x);$$

d'où l'on tire

$$(23) \qquad \frac{1+a}{e^x + a e^{-x}} = e^{\mathfrak{E}x} = 1 + \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{E}_\nu}{\nu!} x^\nu.$$

La forme (22) donne, en outre,

$$f(1) - z f(3) + z^2 f(5) - \dots \pm z^{n-1} f(2n-1) = \frac{f(\mathfrak{E}) \mp z^n f(\mathfrak{E}+2n)}{1+z},$$

z étant l'inverse de a. On en déduit

$$(24) \qquad \mathfrak{E}_p(z) = (1+z)[1^p - 3^p z + 5^p z^2 - 7^p z^3 + \dots].$$

Au moyen de cette égalité, on généralise davantage la notion des nombres d'Euler : il faut supposer, dans ce but, que les quantités $\mathfrak{E}$ soient des fonctions des variables continues p et z.

16. Afin de représenter les nombres ultra-eulériens sous forme finie, soit, pour un instant,

$$u_\nu = \nu^p, \qquad \Delta_\nu = \Delta^\nu(0^p),$$

et remarquons que la formule (24) devient, symboliquement,

$$\mathfrak{E}_p(z) = \frac{(1+z)u}{1+u^2 z} = \frac{1+z}{z} \, \frac{1+\Delta}{\frac{1+z}{z} + 2\Delta + \Delta^2}.$$

En vertu d'un développement connu, on peut donc écrire

$$\mathfrak{E}_p(z) = \sum_1^p (-1)^\nu \cos^{\nu-1}\theta . \cos(\nu+1)\theta . \Delta^\nu(0^p).$$

en posant $z = \cot^2\theta$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_p(z) = & -\cos 2\theta.\Delta(0^p) + \cos\theta \cos 3\theta.\Delta^2(0^p) \\ & -\cos^2\theta \cos 4\theta.\Delta^3(0^p) + \cos^3\theta \cos 5\theta.\Delta^4(0^p) \\ & -\cos^4\theta \cos 6\theta.\Delta^5(0^p) + \ldots .\end{aligned}$$

En particulier, nous pouvons faire $\theta = \frac{\pi}{4}$, et nous trouvons la formule connue [1]

$$\begin{aligned}E_p = & -\frac{1}{4}\left[2\Delta^2(0^p) - 2\Delta^3(0^p) + \Delta^4(0^p)\right] \\ & -\frac{1}{4^2}\left[2\Delta^6(0^p) - 2\Delta^7(0^p) + \Delta^8(0^p)\right] \\ & -\frac{1}{4^3}\left[2\Delta^{10}(0^p) - 2\Delta^{11}(0^p) + \Delta^{12}(0^p)\right] - \ldots .\end{aligned}$$

17. Il est utile de considérer les nombres $\mathfrak{E}$ comme des fonctions de

$$\mu = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

On trouve facilement

$$\begin{aligned}&\mathfrak{E}_1 = \mu, & &\mathfrak{E}_4 = 24\mu^4 - 28\mu^2 + 5,\\ &\mathfrak{E}_2 = 2\mu^2 - 1, & &\mathfrak{E}_5 = 120\mu^5 - 180\mu^3 + 61\mu,\\ &\mathfrak{E}_3 = 6\mu^3 - 5\mu, & &\mathfrak{E}_6 = 720\mu^6 - 1320\mu^4 + 622\mu^2 - 61,\end{aligned}$$

. . . .

Ces polynômes jouissent de propriétés remarquables, dont nous parlerons une autre fois. Ici, observons seulement que le changement de z en $\frac{1}{z}$ entraîne le changement de μ en $-\mu$, et que, par suite,

$$\mathfrak{E}_p\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^p\,\mathfrak{E}_p(z).$$

Les ultra-bernoulliens possèdent la même propriété, pourvu que p diffère de l'unité. Cette remarque pourrait

---

[1] *Nouvelles Annales*, p. 43; 1885.

servir à transformer les intégrales définies, que l'on rencontrera plus loin.

18. Il est évident que les nombres $\mathfrak{E}$ sont des combinaisons simples de nombres ultra-bernoulliens; car

$$(25)\qquad \mathfrak{E}_{p-1}(-z) = \frac{1-z}{2p\sqrt{z}}\left[\mathfrak{B}_p(-\sqrt{z}) - \mathfrak{B}_p(\sqrt{z})\right].$$

En particulier,

$$\mathrm{E}_{p-1} = \frac{2^p(2^p-1)\mathrm{B}_p - 2\mathfrak{B}_p(\sqrt{-1})}{p\sqrt{-1}}.$$

On démontre facilement cette autre formule

$$(26)\qquad \mathfrak{B}_p(-z) = \frac{pz}{1+z}\left[\frac{\mathfrak{E}(z)+1}{2}\right]^{p-1},$$

qui établit une liaison remarquable, au point de vue du calcul des différences, entre les systèmes des nombres $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{E}$. On reste parfaitement convaincu de l'extrême importance de tous ces nombres lorsqu'on cherche à résoudre certaines questions capitales de l'*Analyse partitive* (¹), que nous nous proposons de traiter à fond dans une prochaine *Note*.

19. On rencontre les mêmes nombres dans des questions d'Astronomie. L'ascension droite y du Soleil est donnée, en fonction de la longitude x, par l'équation

$$(27)\qquad \operatorname{tang} y = \mu \operatorname{tang} x,$$

où $\mu = \cos\omega$, ω étant l'obliquité de l'écliptique. L'équa-

---

(¹) Il y a, sur le sujet auquel nous faisons allusion, des travaux de Sylvester, Brioschi, Battaglini, etc. Lisez, dans les *Atti* de l'Académie de Naples (1865), un important Mémoire de Trudi, *Sur la partition des nombres*.

tion (23) se dédouble en

$$\cos(\mathfrak{E}x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \mu^2 \sin^2 x}},$$

$$\sin(\mathfrak{E}x) = \frac{\mu \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + \mu^2 \sin^2 x}},$$

après substitution de $x\sqrt{-1}$ à x. Cela étant, on trouve, en dérivant (27),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{\sqrt{\cos^2 x + \mu^2 \sin^2 x}} = \mu \cos x \cos(\mathfrak{E}x) + \sin x \sin(\mathfrak{E}x)$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu + 1}{2} \cos[(\mathfrak{E} - 1)x] + \frac{\mu - 1}{2} \cos[(\mathfrak{E} + 1)x].$$

D'autre part, la formule (22) donne

$$\frac{\mu + 1}{2} \cos[(\mathfrak{E} - 1)x] - \frac{\mu - 1}{2} \cos[(\mathfrak{E} + 1)x] = 1.$$

Par suite,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + (\mu - 1)\cos[(\mathfrak{E} + 1)x].$$

Ici nous pouvons introduire les nombres $\mathfrak{B}$, au moyen de la formule (26), et nous trouvons, après intégration,

$$y = x - \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\mathfrak{B}_{2\nu+1}\left(-\tang^2 \frac{\omega}{2}\right)}{(2\nu+1)!\,(2\nu+1)} (2x)^{2\nu+1}.$$

Si l'on ordonnait le second membre par rapport aux puissances de $\tang \frac{\omega}{2}$, en tenant compte de l'égalité (17), on obtiendrait la formule de Lagrange, exprimant la *réduction à l'équateur*.

V. — Intégrales définies.

20. Il est presque évident que, si l'on pose

$$F(x) = a_1 f(x) + a_2 f(2x) + a_3 f(3x) + \ldots,$$

on a

$$(28) \qquad \frac{a_1}{1^x} + \frac{a_2}{2^x} + \frac{a_3}{3^x} + \ldots = \frac{\int_0^\infty \varphi^{x-1} F(\varphi)\, d\varphi}{\int_0^\infty \varphi^{x-1} f(\varphi)\, d\varphi} \qquad [1].$$

En particulier, si l'on fait $f(x) = e^{-x}$, en supposant successivement $a_\nu = 1$, $a_\nu = \frac{1}{2}[1 - (-1)^\nu]$, on peut exprimer la somme qui figure dans le premier membre de (9), puis cette somme, dans laquelle on néglige les termes de rang pair. On parvient ainsi aux relations

$$(29) \qquad (-1)^{p-1} \frac{B_{2p}}{2p} = 2 \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p-1}\, d\varphi}{e^{2\pi\varphi} - 1},$$

$$(30) \qquad (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p}(-1)}{2p} = 2 \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p-1}\, d\varphi}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}},$$

dont la première est la *formule de Plana*. De même, en utilisant l'égalité (14), on obtient

$$(-1)^p E_{2p} = 2 \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p}\, d\varphi}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} - e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}.$$

21. La formule (30) peut être généralisée au moyen de (21). On trouve

$$(31) \qquad (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p}(-z)}{2p} = 2 \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p-1} \cos(\varphi \log z)}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi,$$

$$(32) \qquad (-1)^p \frac{\mathfrak{B}_{2p+1}(-z)}{2p+1} = 2 \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p} \sin(\varphi \log z)}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi.$$

---

[1] Cette formule est susceptible d'être généralisée, et elle devient alors d'une fécondité extrême. Nous en ferons, sous peu, quelques applications à la *Théorie des nombres*.

p étant positif. Si, dans la dernière formule, on veut faire $p = 0$, on doit ajouter $\frac{1}{2}$ au second membre. On obtient, dans ce cas particulier, la formule connue

$$(33)\qquad \frac{e^t - 1}{e^t + 1} = 4\int_0^\infty \frac{\sin(\varphi t)}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi.$$

On tire encore, de la relation (25),

$$(-1)^p \mathfrak{E}_{2p}(z) = \frac{1+z}{\sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p}\cos\dfrac{\varphi \log z}{2}}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} - e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}\, d\varphi.$$

$$(-1)^{p+1} \mathfrak{E}_{2p+1}(z) = \frac{1-z}{\sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p-1}\sin\dfrac{\varphi \log z}{2}}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} - e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}\, d\varphi.$$

Enfin, il est évident que toutes ces relations sont renfermées dans la formule symbolique générale

$$\begin{aligned} &z f(1) - z^2 f(2) - z^3 f(3) - \ldots \\ &\quad = \tfrac{1}{2} f(0) + \int_0^\infty \frac{\sin[(X - \log z)\varphi]}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi. \end{aligned}$$

dans laquelle on suppose que e^{Xr} soit l'expression symbolique de $f(x)$. On obtient cette dernière formule en portant les valeurs (31) et (32) dans la relation (16), et en supposant $\mathrm{mod}\, z < 1$, pour n indéfiniment croissant [1].

22. Toutes ces formules pourraient nous fournir les valeurs d'une infinité d'intégrales définies, plus ou moins intéressantes. Il suffirait de remplacer les nombres $\mathfrak{B}$ et les nombres $\mathfrak{E}$ par leurs expressions dans

---

[1] Bien entendu, la fonction f doit être telle que, pour n infini, $z^n f(n + \theta)$ tende vers *zéro* : cela constitue un ensemble de conditions, qui n'est pas toujours vérifié.

tous les développements qui précèdent. C'est ainsi que les formules (5) et (7) donnent

$$\frac{1}{x} - \cot x = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\varphi x} - e^{-2\varphi x}}{e^{2\pi\varphi} - 1}\, d\varphi,$$

$$\tang x = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\varphi x} - e^{-2\varphi x}}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi \quad (^1),$$

pourvu que l'on tienne compte respectivement des formules (29) et (30). On trouve encore

$$\text{séc}\, x = \int_0^\infty \frac{e^{\varphi x} + e^{-\varphi x}}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} + e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}\, d\varphi;$$

. . . .

De même, la formule (19) devient, en y posant $a = e^{-t}$,

$$(34)\qquad \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + 2\cos x + e^{-t}} = 2\int_0^\infty \frac{e^{\varphi x} + e^{-\varphi x}}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}} \sin(\varphi t)\, d\varphi.$$

Cette intégrale a été signalée par Poisson (²) : elle comprend (33) comme cas particulier.

23. Remarquons, enfin, que la formule (28) donne naissance à un grand nombre d'autres intégrales définies. On en déduit, par exemple,

$$\mathfrak{B}_{p-x}(z) = \frac{p-x}{p\,\Gamma(x)}\int_0^\infty \varphi^{x-1}\mathfrak{B}_p(z e^{-2\varphi})\, d\varphi.$$

De même,

$$\mathfrak{E}_{p-x}(z) = \frac{1+z}{\Gamma(x)}\int_0^\infty \frac{\varphi^{x-1}\mathfrak{E}_p(z e^{-2\varphi})}{e^{\varphi} + z e^{-\varphi}}\, d\varphi;$$

(¹) Ces intégrales sont fort connues : on les emploie, habituellement, pour démontrer la *formule de Plana,* en suivant une voie inverse de celle que nous venons de tracer.

(²) *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIIe Cahier, p. 297.

en particulier,

$$E_p(x) = \frac{2}{\Gamma(x)}\int_0^\infty \frac{\varphi^{x-1}\mathfrak{E}_p(e^{-2\varphi})}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}\,d\varphi.$$

Plus généralement, les valeurs des intégrales multiples

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \varphi_1^{x_1-1}\varphi_2^{x_2-1}\cdots\varphi_n^{x_n-1}\,\mathfrak{B}_{p-x}(ze^{-\varphi})\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_n,$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \varphi_1^{x_1-1}\varphi_2^{x_2-1}\cdots\varphi_n^{x_n-1}\,\frac{\mathfrak{E}_{p-x}(ze^{-2\varphi})}{e^{\varphi}+ze^{-\varphi}}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_n,$$

où

$$x = x_1+x_2+\ldots+x_n,\qquad \varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n,$$

sont respectivement

$$(p-x)\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)\ldots\Gamma(x_n)\frac{\mathfrak{B}_p(z)}{p},$$

$$\frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)\ldots\Gamma(x_n)}{1+z}\mathfrak{E}_p(z);$$

. . . .

24. L'application des formules précédentes, aux suites qui ont pour type la série de Lambert, présente aussi beaucoup d'intérêt, au point de vue de la théorie des nombres. Ici nous nous bornons à signaler, en premier lieu, la formule

$$\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{C-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} + \frac{1}{4} + \int_0^\infty\left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\log\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{\varphi\log\frac{1}{x}}\right]\frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1},$$

que l'on établit à l'aide des développements du n° 2. On sait que des résultats de ce genre ont été obtenus par

divers géomètres (¹), qui espéraient arriver, par là, à exprimer analytiquement la *loi des nombres premiers*. On a aussi

$$\frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1+x^6} + \frac{x^5}{1+x^{10}} - \ldots = \int_0^\infty \frac{\operatorname{séc}\left(2\varphi \log \frac{1}{x}\right)}{e^{\pi\varphi}+e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi,$$

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \ldots$$
$$= \frac{\log 2}{\log \frac{1}{x}} - \frac{1}{4} + \int_0^\infty \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2}\log\frac{1}{x}\right)}{e^{2\pi\varphi}-1}\, d\varphi.$$

. . . .

On transforme sans peine ces intégrales en intégrales doubles, en faisant usage des premières formules du n° **22**. On trouve, par exemple,

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+x^6} + \frac{x^5}{1+x^{10}} - \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\varphi\psi} + x^{-\varphi\psi}}{\left(e^{\frac{\pi\varphi}{2}} + e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}\right)\left(e^{\frac{\pi\psi}{2}} + e^{-\frac{\pi\psi}{2}}\right)}\, d\varphi\, d\psi.$$

25. Nous allons enfin démontrer une autre formule, comprenant comme cas particuliers les transformations que M. Catalan a déduites de l'égalité (34). Soit, dans ce but, $a = x^n$, dans la formule (20). On trouve d'abord

$$\sum_{n+1} \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{\log \frac{1}{1-x^n}}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^n}{2(1-x^n)}$$
$$- \sum_1^\infty \frac{B_{2\nu}\mathfrak{B}_{2\nu}(x^{-n})}{(2\nu)!\,2\nu}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\nu-1};$$

(¹) *Voir* les formules de M. Curtze dans le t. I des *Annali di Matematica*, et les transformations signalées par M. Catalan dans ses *Recherches sur quelques produits indéfinis* (p. 120).

puis, en vertu de la formule de Plana,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1-x^{n-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{x^n}{1-x^n}$$

$$- \frac{\log \dfrac{1}{1-x^n}}{\log \dfrac{1}{x}} - 2\int_0^{\infty} \frac{x^n \sin(\varphi \log x)}{1-2x^n\cos(\varphi\log x)+x^{2n}}\,\frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1},$$

pourvu que l'on ait égard à la formule (19), dans laquelle on remplace x par $\varphi \log x$ et a par x^n. En particulier, pour $n=1$, on trouve la formule de M. Catalan :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1-x} - \frac{\log \dfrac{1}{1-x}}{\log \dfrac{1}{x}}$$

$$- 2\int_0^{\infty} \frac{x \sin(\varphi \log x)}{1-2x\cos(\varphi\log x)+x^{2}}\,\frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1}.$$

ÉTUDE SUR LES PARIS DE COURSES;

PAR M. M. DU CHATENET.

PRÉLIMINAIRES.

Les paris de courses peuvent se diviser en deux grandes catégories, les paris *pour* les chevaux et les paris *contre* les chevaux. Dans le premier cas, le parieur a gagné quand le cheval qu'il a désigné arrive premier; dans le second, le parieur a gagné quand le cheval désigné n'arrive pas. Ces deux espèces de paris sont la conséquence naturelle l'une de l'autre; leur existence est simultanée; l'une forme la contre-partie nécessaire de l'autre.

On dit encore qu'on *prend* les chevaux ou qu'on les

donne. Celui qui parie pour les chevaux est le *preneur*, celui qui parie contre eux est le *donneur*. Ce pari peut fort bien être comparé à une opération de bourse à terme; le preneur joue le rôle d'acheteur, et le donneur, celui de vendeur.

La base des paris de courses est la suivante : Le preneur d'un cheval parie un enjeu P qu'il arrivera premier; mais, comme plusieurs chevaux doivent prendre part à la course en question et que leurs qualités respectives ne sont pas les mêmes, on conçoit que la probabilité que le cheval désigné a d'arriver varie suivant le nombre et les qualités de ses concurrents. Si le preneur gagne, il devra donc recevoir, après avoir retiré son enjeu, une somme Q, généralement différente de P.

Nous admettons comme un axiome que, dans tout pari équitable, si les chances que plusieurs parieurs ont de gagner une certaine somme sont égales, leurs enjeux doivent aussi être égaux. Si q joueurs peuvent gagner une somme S à chances égales, leur mise devra être $\frac{S}{q}$, et la probabilité que chacun d'eux a de gagner est $\frac{1}{q}$. Si une seule personne se substitue à p joueurs, pour que le jeu reste équitable, il faudra qu'elle fournisse p enjeux égaux à $\frac{S}{q}$, soit une somme $\frac{p}{q}S$; elle acquiert donc la probabilité $\frac{p}{q}$ de gagner.

Nous voyons donc que, dans un jeu ou pari équitable, l'enjeu de chacun des joueurs ou parieurs doit être égal au produit de la somme qui sera dévolue au gagnant, par la probabilité qu'il a de l'obtenir. La somme S étant formée de la réunion des enjeux contient aussi celui du gagnant; le bénéfice réel sera donc $S\left(1-\frac{p}{q}\right)$.

Le produit $\frac{p}{q}S$ porte le nom d'*espérance mathéma-*

tique du joueur. Dans un jeu équitable, l'enjeu doit être égal à l'espérance mathématique.

Soit une course à laquelle doivent prendre part plusieurs chevaux. On les donne et les prend aux cotes a, b, c, d, ... Cela veut dire que, si le cheval qui a été pris arrive, le preneur recevra, après avoir retiré son enjeu, une somme égale à a, b, c, d, ... fois cet enjeu. Si le cheval a pour cote m et que l'enjeu ait déjà été fourni, le preneur touchera donc une somme égale à $m+1$ fois l'enjeu ou $(m+1)P$.

Soit μ la probabilité de gagner ; l'espérance mathématique sera, d'après ce que nous avons dit, $\mu(m+1)P$; or, comme elle doit être égale à P, il s'ensuit que

$$\mu = \frac{1}{m+1} \quad \text{ou} \quad m = \frac{1}{\mu} - 1.$$

Si la cote est bien faite, la probabilité d'un cheval est égale à l'inverse de sa cote augmenté de l'unité, et sa cote à l'inverse de la probabilité diminué de l'unité. Ces deux éléments peuvent donc être déduits très facilement l'un de l'autre.

La conséquence de ce qui précède est qu'on devra avoir, entre les cotes de tous les chevaux engagés pour une même course, la relation suivante

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} + \ldots = 1$$

ou, en écrivant d'une manière symbolique,

$$\sum \frac{1}{a+1} = 1.$$

Dans la pratique, il n'arrive presque jamais qu'il en soit ainsi. En effet, les cotes, puisqu'elles sont fonction de la probabilité, n'ont rien d'absolu et peuvent varier d'une personne à l'autre suivant que sa connaissance ou

son appréciation des qualités de tel ou tel cheval ou de ses bonnes dispositions la porte à avoir plus ou moins de confiance en lui. On comprend aussi que les cotes doivent varier sur le marché suivant les lois bien connues de l'offre et de la demande. Il est évident que, lorsqu'on aura $\sum \frac{1}{a+1} > 1$, l'ensemble des paris devra être favorable aux donneurs et que, lorsqu'on aura $\sum \frac{1}{a+1} < 1$, il sera favorable aux preneurs. L'une ou l'autre de ces inégalités sera vérifiée suivant que l'influence des uns ou des autres l'emportera sur le marché.

Quand on a $\sum \frac{1}{a+1} > 1$, on peut écrire

$$\sum \frac{1}{a+1} = 1 + M,$$

M étant un nombre, c'est-à-dire une grandeur essentiellement positive. Ce nombre M, par analogie avec ce qui se passe dans le cas des assurances, a reçu le nom de *chargement* (E. Dormoy, *Journal des Actuaires français*, t. III, 1874). Si, au contraire, $\sum \frac{1}{a+1} < 1$, on pourra écrire $\sum \frac{1}{a+1} = 1 - N$, N étant un nombre que nous appellerons, dans ce cas, le *déchargement*. L'avantage des donneurs de chevaux augmentera en même temps que le chargement, et celui des preneurs en même temps que le déchargement.

On appelle *faire un livre* disposer ses paris pour ou contre les chevaux, de manière à obtenir un bénéfice certain, quel que soit le résultat de la course. Un livre bien fait est, d'après ce qui a été dit, incompatible avec un jeu équitable; car, lorsque les cotes présentent un chargement ou un déchargement, les enjeux ne sont plus tous égaux à l'espérance mathématique.

Il est certain que l'opération du parieur qui donne tous les chevaux au public, suivant son livre, ne constitue pas un jeu équitable si l'on considère le public comme une même personne; mais, quand un parieur vient prendre un cheval à une cote m, c'est que, suivant son appréciation, sa probabilité de gagner est supérieure à $\frac{1}{m+1}$. Le jeu ne serait équitable que si le preneur croyait la probabilité égale à $\frac{1}{m+1}$, et, dans ce cas, il n'aurait plus intérêt à prendre le cheval. On peut donc dire que d'aucun côté le pari n'est équitable, parce que l'appréciation du cheval, d'où dérive la cote et qui domine toute la question, varie d'une personne à l'autre.

Les paris que l'on peut faire à propos de courses pour ou contre les chevaux sont extrêmement variés. Nous examinerons un certain nombre d'entre eux.

I. — *Livre du preneur de chevaux.*

Soit une course dans laquelle différents chevaux sont engagés et dont les cotes sont a, b, c, d, ... Cherchons quels enjeux x, y, z, ... on devra parier pour chacun d'eux, de manière à obtenir un bénéfice A si le cheval coté a arrive, B si c'est celui coté b, etc.

Il suffira, pour cela, d'écrire que la somme à recevoir, qui est $(a+1)x$, y compris la mise, est égale à la somme de tous les enjeux augmentée du bénéfice. Nous obtiendrons ainsi, en appliquant le même raisonnement à l'hypothèse où chacun des chevaux arriverait premier, le système d'équations suivant

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} (a+1)x = x+y+z+\ldots+A, \\ (b+1)y = x+y+z+\ldots+B, \\ (c+1)z = x+y+z+\ldots+C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

on aura autant d'équations qu'il y a de chevaux, c'est-à-dire le nombre nécessaire pour déterminer toutes les inconnues.

On en déduit, en les combinant deux à deux,

$$y = \frac{(a-1)x + B - A}{b-1}, \qquad z = \frac{(a-1)x + C - A}{c-1}, \qquad \ldots$$

En portant ces valeurs dans la première équation du système, on obtiendra la valeur de x et par symétrie celles des autres inconnues. Les solutions seront

$$x = \left(\frac{\frac{A}{a-1} + \frac{B}{b-1} + \frac{C}{c-1} + \ldots}{1 - \frac{1}{a-1} - \frac{1}{b-1} - \frac{1}{c-1} - \ldots} - A \right) \frac{1}{a-1},$$

$$y = \left(\frac{\frac{A}{a-1} + \frac{B}{b-1} + \frac{C}{c-1} + \ldots}{1 - \frac{1}{a-1} - \frac{1}{b-1} - \frac{1}{c-1} - \ldots} - B \right) \frac{1}{b-1},$$

$$z = \left(\frac{\frac{A}{a-1} + \frac{B}{b-1} + \frac{C}{c-1} + \ldots}{1 - \frac{1}{a-1} - \frac{1}{b-1} - \frac{1}{c-1} - \ldots} - C \right) \frac{1}{c-1},$$

. . . .

En adoptant l'écriture symbolique suivante et en introduisant la valeur du déchargement, les formules deviendront

$$(2) \quad \begin{cases} x = \left(\frac{1}{N} \sum \frac{A}{a-1} - A \right) \frac{1}{a-1}, \\ y = \left(\frac{1}{N} \sum \frac{A}{a-1} - B \right) \frac{1}{b-1}, \\ z = \left(\frac{1}{N} \sum \frac{A}{a-1} + C \right) \frac{1}{c-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En faisant la somme $x + y + z + \ldots$, nous aurons la somme à verser entre les mains du donneur s'il l'exige.

c'est-à-dire le capital employé à l'opération. Il est égal à $\frac{1}{N}\sum\frac{A}{a+1}$.

Le rendement de l'opération, c'est-à-dire le rapport du gain au capital employé, sera, si c'est le premier cheval qui arrive, $\frac{AN}{\sum\frac{A}{a+1}}$.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les valeurs trouvées pour x, y, z, ... soient toutes positives.

Le simple examen des formules (2) montre que cette condition sera satisfaite quand on aura $\sum\frac{1}{a+1} < 1$, c'est-à-dire quand il y aura un déchargement.

On peut montrer aussi que le déchargement est nécessaire. En effet, supposons $\sum\frac{1}{a+1} > 1$; alors, pour que la valeur de x, par exemple, soit positive, il faut que

$$\sum\frac{1}{a+1} - \frac{1}{A}\sum\frac{A}{a+1} > 1.$$

Pour que celles de y, z, ... le soient, il faudra que des inégalités analogues soient satisfaites, obtenues en remplaçant A par B, C, ... Soit A la plus petite des grandeurs A, B, C, ...; le produit $\frac{1}{A}\sum\frac{A}{a+1}$ sera composé d'une somme de fractions dont l'une aura pour numérateur l'unité, et les autres des numérateurs tous supérieurs à l'unité; ce produit sera donc supérieur à $\sum\frac{1}{a+1}$, et le premier membre de l'inégalité à satisfaire sera négatif, ce qui conduit à une absurdité.

La seule condition de possibilité du problème est donc l'existence d'un déchargement. La somme à employer sera alors inversement proportionnelle au déchargement, et le rendement lui sera proportionnel.

Des formules générales (2), nous pouvons déduire quelques cas particuliers intéressants, qui correspondent à des applications pratiques.

Supposons que le preneur veuille obtenir un bénéfice uniforme quel que soit le cheval qui arrive. Il suffira, dans les formules (2), de faire $A = B = C = \ldots = Q$. Les valeurs des enjeux se simplifient et deviennent

$$(3) \quad x = \frac{1}{a+1}\,\frac{Q}{N}, \quad y = \frac{1}{b+1}\,\frac{Q}{N}, \quad z = \frac{1}{c+1}\,\frac{Q}{N}, \quad \ldots$$

Le capital employé sera égal à $\left(\frac{1}{N} - 1\right)Q$, et le rendement à $\frac{N}{1-N}$.

Les enjeux devront être, comme précédemment, proportionnels à la probabilité et au bénéfice cherché, et inversement proportionnels au déchargement.

La probabilité que les divers chevaux ont d'arriver est loin d'être la même, et, dans une même course, les cotes présentent presque toujours de grandes différences. Il y a donc tout intérêt pour le parieur à disposer ses enjeux, de manière à recueillir des bénéfices d'autant plus forts que le cheval qui y donnera lieu a une plus grande probabilité d'arriver.

Le parieur dispose complètement des grandeurs A, B, C, ...; il peut choisir à son gré le bénéfice qu'il veut réaliser sur chaque cheval. Il pourra donc fixer, comme il lui plaira, une relation entre A, B, C, ... et a, b, c, ... Supposons que le gain que l'on veut obtenir sur un cheval soit proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la probabilité qu'il a d'arriver. Il suffira, dans les formules (2), de faire

$$A = \frac{p}{(a+1)^n}, \quad B = \frac{p}{(b+1)^n}, \quad C = \frac{p}{(c+1)^n}, \quad \ldots$$

p étant un nombre quelconque qui restera à la disposi-

tion du parieur. Les formules donnent alors

$$(4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{p}{a+1}\left[\dfrac{1}{N}\sum\dfrac{1}{(a+1)^{n-1}} + \dfrac{1}{(a+1)^{n}}\right], \\ y = \dfrac{p}{b+1}\left[\dfrac{1}{N}\sum\dfrac{1}{(a+1)^{n-1}} + \dfrac{1}{(b+1)^{n}}\right], \\ z = \dfrac{p}{c+1}\left[\dfrac{1}{N}\sum\dfrac{1}{(a+1)^{n-1}} + \dfrac{1}{(c+1)^{n}}\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Le capital employé sera

$$\frac{p}{N}\sum\frac{1}{(a+1)^{n-1}}.$$

Les enjeux ne seront plus proportionnels à la probabilité, mais ils varieront dans le même sens. Ils seront proportionnels à p, que l'on pourrait appeler le coefficient caractéristique de l'opération. Étant donné le capital S dont on dispose et que l'on veut engager dans l'opération, on pourra en déduire p. On aura, en effet,

$$p = \frac{NS}{\sum\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}}.$$

Quand on fait au preneur l'obligation de verser le montant de ses enjeux, celui-ci a tout intérêt à adopter la combinaison qui demandera l'emploi d'un moindre capital. Il est des parieurs qui renoncent à obtenir un bénéfice quel que soit le cheval gagnant, et qui, en s'arrangeant de manière à ne rien perdre en toute hypothèse, ne cherchent à gagner que sur un ou plusieurs chevaux en qui ils ont particulièrement confiance. Ce mode d'opérer repose plus que les précédents sur l'appréciation personnelle des chevaux engagés; il consiste à parier pour les gagnants qui paraissent les plus probables et à se couvrir sur les autres.

Ce cas particulier peut encore se déduire des for-

mules (2). Supposons qu'on veuille gagner des sommes A et B sur les chevaux cotés a et b, et seulement se couvrir sur les autres. On fera $C = 0$, $D = 0$, ..., et les valeurs des enjeux auront pour expression

$$(5)\quad \begin{cases} x = \left[\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1}\right) + A\right]\dfrac{1}{a+1}, \\ y = \left[\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1}\right) + B\right]\dfrac{1}{b+1}, \\ z = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1}\right)\dfrac{1}{c+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le capital employé sera

$$\frac{1}{N}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right).$$

On peut, tout en acceptant l'idée de ne faire un bénéfice que sur des chevaux déterminés et de se couvrir sur les autres, vouloir que ce bénéfice soit uniforme en toute hypothèse favorable. On fera, dans les formules (5), $A = B = Q$, ce qui donnera

$$(6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{Q}{N}\left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + N\right)\dfrac{1}{a+1}, \\ y = \dfrac{Q}{N}\left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + N\right)\dfrac{1}{b+1}, \\ z = \dfrac{Q}{N}\left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + N\right)\dfrac{1}{c+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le capital employé sera

$$\frac{Q}{N}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right).$$

Supposons enfin qu'on veuille obtenir sur deux chevaux, tout en se couvrant sur les autres, un bénéfice proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la probabilité de

l'obtenir. Les formules deviendront

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{p}{N}\left[\dfrac{1}{(a+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(b+1)^{n+1}} + \dfrac{N}{(a+1)^{n}}\right]\dfrac{1}{a+1}, \\ y = \dfrac{p}{N}\left[\dfrac{1}{(a+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(b+1)^{n+1}} + \dfrac{N}{(b+1)^{n}}\right]\dfrac{1}{b+1}, \\ z = \dfrac{p}{N}\left[\dfrac{1}{(a+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(b+1)^{n+1}}\right]\dfrac{1}{c+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le capital employé sera

$$\frac{p}{N}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(b+1)^{n+1}}\right].$$

Prenons un exemple numérique et appliquons-lui chacune des quatre méthodes que nous venons d'exposer. Soient six chevaux engagés dans une course et offerts aux cotes suivantes :

$$2\tfrac{3}{4},\quad 3\tfrac{1}{2},\quad 4,\quad 7,\quad 12,\quad 16.$$

Ces cotes correspondent à un déchargement de 0,65.

Supposons que nous voulions gagner sur ces différents chevaux 100^{fr}, 120^{fr}, 130^{fr}, 90^{fr}, 80^{fr}, 70^{fr}. Nous devrons disposer nos enjeux comme il suit :

$564^{fr},50$, $474^{fr},85$, $429^{fr},35$, $263^{fr},35$, $161^{fr},30$, $122^{fr},75$.

Le capital employé sera

$2016^{fr},10$.

Si nous voulons gagner 100^{fr} dans la course, quel que soit le cheval qui arrive, nous devrons placer nos mises de la manière suivante :

$533^{fr},35$, $444^{fr},45$, 400^{fr}, 250^{fr}, $153^{fr},85$, $117^{fr},65$.

Le capital employé sera

1900^{fr},

en nombre rond, et le rendement de l'opération

$$0,052 \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{19},$$

soit un peu plus de 5 pour 100.

Si nous voulons obtenir sur chaque cheval un bénéfice proportionnel à sa probabilité d'arriver, nous placerons nos enjeux comme il suit, en faisant $p = 100$,

106fr,50, 87fr,75, 78fr,50, 48fr,15, 29fr,25, 22fr,25.

Le capital employé sera

372fr,40 ;

le bénéfice sera, suivant le gagnant,

26fr,65, 21fr,40, 20fr, 12fr,50, 7fr,50, 5fr,90.

Si nous voulons gagner 100fr et 120fr sur les deux premiers chevaux susdits en nous couvrant sur les autres, nous disposerons ainsi nos mises :

311fr,05, 263fr,65, 213fr,30, 133fr,30, 82fr,05, 62fr,75.

Le capital employé sera

1066fr,10.

II. — *Livre du donneur de chevaux.*

Nous avons vu que l'existence du déchargement était indispensable pour que le preneur puisse faire un livre. Dans la pratique, il est très rare qu'il en soit ainsi : les cotes présentent presque toujours un chargement assez important, c'est-à-dire que les conditions générales des paris sont favorables aux donneurs.

Comme le preneur de chevaux touche ordinairement, en cas de gain, une somme beaucoup plus forte que celle qu'il a exposée, et que cette perspective exerce sur la grande majorité des hommes une séduction spéciale, une espèce de fascination, il n'est pas étonnant que le public fasse un certain sacrifice pour prendre une position qui lui est particulièrement agréable. D'autre part, les paris contre les chevaux ont seuls fait l'objet d'une

industrie organisée, celle des bookmakers; on devait donc s'attendre à voir ces derniers prélever sur leurs opérations un bénéfice déterminé, dû au chargement, et analogue à la commission d'un intermédiaire, au courtage d'un agent de change.

Soient a, b, c, ... les cotes de divers chevaux engagés dans une course; cherchons quelles mises x, y, z, ... le donneur pourra accepter de manière à obtenir un bénéfice A si le cheval coté a arrive, B si c'est celui coté b, etc.

Cette question est immédiatement résolue au moyen des équations (1) qui nous ont servi à étudier la position du preneur. Si, au lieu d'un chargement, il existe un déchargement M, il suffira de changer, dans ces équations, le signe de A, B, C, ..., et les formules générales donnant la solution du problème seront

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{M}\sum\frac{A}{a-1} - A\right)\frac{1}{a-1}, \\ y &= \left(\frac{1}{M}\sum\frac{A}{a-1} - B\right)\frac{1}{b-1}, \\ z &= \left(\frac{1}{M}\sum\frac{A}{a-1} - C\right)\frac{1}{c-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital engagé dans l'opération par le donneur sera

$$\frac{1}{M}\sum\frac{A}{a-1}.$$

Si l'on compare les formules (2) avec les formules (6), on est frappé de ce fait remarquable que les valeurs de x, y, z, ... peuvent devenir nulles dans les dernières. Le donneur pourra donc faire un livre en opérant seulement sur une partie des chevaux, au lieu que le preneur ne pourra en négliger aucun.

Si le donneur veut obtenir un bénéfice uniforme Q.

quel que soit le cheval qui arrive, on fera, dans les formules, $A = B = C = \ldots = Q$, et elles donneront

$$(7)\qquad x = \frac{Q}{M}\,\frac{1}{a+1},\qquad y = \frac{Q}{M}\,\frac{1}{b+1},\qquad z = \frac{Q}{M}\,\frac{1}{c+1},\qquad \ldots.$$

Le capital engagé sera

$$Q\,\frac{1+M}{M},$$

et le rendement

$$\frac{M}{1+M}.$$

Si l'on veut réaliser sur chaque cheval un gain proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de sa probabilité d'arriver, on se servira des formules suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{p}{a+1}\left[\dfrac{1}{M}\sum\dfrac{1}{(a+1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(a+1)^{n}}\right], \\[2ex] y = \dfrac{p}{b+1}\left[\dfrac{1}{M}\sum\dfrac{1}{(a+1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(b+1)^{n}}\right], \\[2ex] z = \dfrac{p}{c+1}\left[\dfrac{1}{M}\sum\dfrac{1}{(a+1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(c+1)^{n}}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le capital engagé par la contre-partie sera

$$\frac{p}{M}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}}.$$

Si l'on veut obtenir un bénéfice A et B sur deux chevaux en se bornant à se couvrir sur les autres, les formules donneront

$$(9)\qquad \begin{cases} x = \left[\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1}\right) - A\right]\dfrac{1}{a+1}, \\[2ex] y = \left[\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1}\right) - B\right]\dfrac{1}{b+1}, \\[2ex] z = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b-1}\right)\dfrac{1}{c+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le capital sera

$$\frac{1}{M}\left(\frac{A}{a+1}+\frac{B}{b+1}\right).$$

Si le bénéfice que l'on veut faire est le même sur les deux chevaux, les formules deviendront

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-M\right)\frac{1}{a+1},\\ y &= \frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-M\right)\frac{1}{b+1},\\ z &= \frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)\frac{1}{c+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital sera

$$\frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right).$$

Si, enfin, on veut obtenir sur deux chevaux un bénéfice proportionnel à la n^{ieme} puissance de la probabilité, on aura

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}-\frac{M}{(a+1)^{n}}\right]\frac{1}{a+1},\\ y &= \frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}-\frac{M}{(b+1)^{n}}\right]\frac{1}{b+1},\\ z &= \frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}-\frac{M}{(c+1)^{n}}\right]\frac{1}{c+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital sera

$$\frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}\right].$$

Deux personnes qui font un pari se bornent très souvent à l'inscrire et le règlent après la course. Mais il arrive aussi, et toujours avec les bookmakers qui opèrent sur le champ de course, que le donneur reçoit à l'avance le montant du pari des mains du preneur. Nous avons indiqué, dans chaque cas, la somme qu'il avait à rece-

voir. Si, au contraire, le donneur avait à verser à l'avance le montant de son pari, cette somme serait représentée par

$$ax + by + cz + \ldots,$$

ce qui donnerait, dans le premier cas,

$$\frac{1}{M}\sum\frac{A}{a+1}\sum\frac{a}{a+1} - \sum\frac{Aa}{a+1}.$$

et, dans le second cas,

$$\frac{Q}{M}\sum\frac{a}{a+1}.$$

III. — *Chevaux placés deuxièmes.*

La coutume est de parier que tel cheval arrivera ou n'arrivera pas premier. Cependant, puisque les paris de courses reposent sur l'appréciation des qualités des chevaux, il est aussi naturel de parier que tel cheval arrivera ou n'arrivera pas second. Il y a donc lieu de se demander quelles doivent être les cotes de second a', b', c', d', ... des chevaux engagés dans une course et qui ont pour la place de premier les cotes a, b, c, d, ...

Les cotes de second ne sont pas définies sur le marché, et il faut pouvoir les déduire de celles que l'on connaît. On ne peut indiquer aucune relation rigoureusement exacte entre ces différentes espèces de cotes. Celles de premier sont, en effet, essentiellement liées les unes aux autres, et, si l'on supprime un cheval de la course, leurs valeurs relatives doivent changer. Nous admettrons, comme l'idée la plus naturelle, que les cotes de second restent proportionnelles à celles de premier.

Dans ce cas où le cheval coté b arrive premier, la probabilité, pour que le cheval coté a arrive second, sera

$$\frac{\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}+\ldots}.$$

ou

$$\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{b+1}},$$

et, pour que ces deux événements arrivent à la fois, la probabilité sera le produit de celle de chacun d'eux, soit

$$\frac{\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{b+1}}{1+M-\frac{1}{b+1}}.$$

De même, pour que le cheval coté a arrive second, le cheval coté c arrivant premier, la probabilité est

$$\frac{\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{c+1}}{1+M-\frac{1}{c+1}}, \quad \cdots$$

La probabilité cherchée sera la somme de toutes ces probabilités partielles, ou

$$\frac{1}{a+1}\left(\frac{\frac{1}{b+1}}{1+M-\frac{1}{b+1}}+\frac{\frac{1}{c+1}}{1+M-\frac{1}{c+1}}+\frac{\frac{1}{d+1}}{1+M-\frac{1}{d+1}}+\cdots\right),$$

ce qu'on peut écrire symboliquement

(12) $$\frac{1}{a'+1}=\frac{1}{a+1}\left(\sum\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{a}{a+1}}-\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}}\right).$$

En faisant la somme des probabilités qu'ont les chevaux d'une même course d'arriver seconds, nous obtiendrons

$$1+M.$$

Le chargement ou déchargement ne sera donc pas modifié, ce qui rend assez plausible l'hypothèse adoptée.

On aura donc

$$\sum \frac{1}{a'+1} = \sum \frac{1}{a+1} = 1 + M.$$

La formule (12) permettra de calculer les cotes de second en fonction des cotes de premier. On pourra se proposer sur les chevaux seconds les mêmes questions que nous avons déjà étudiées. Le livre se fera de la même manière au moyen des nouvelles cotes. Le chargement ou déchargement étant le même, si une des catégories de parieurs était avantagée par les premières cotes, cet avantage persistera avec les secondes.

Prenons un exemple numérique. Soient cinq chevaux figurant dans une course avec les cotes $1\frac{1}{2}$, 3, 4, 7, 9, qui correspondent à un chargement de 0,075. Les cotes de second seront, à très peu près,

$$2\tfrac{1}{4},\quad 2\tfrac{3}{4},\quad 3\tfrac{1}{2},\quad 5\tfrac{1}{2},\quad 7.$$

On voit qu'elles diffèrent notablement des précédentes; les unes sont augmentées, et les autres diminuées. Cela se comprend facilement, car un cheval peut très bien avoir une probabilité plus grande pour arriver premier que second.

IV. — *Chevaux placés troisièmes.*

Les paris sur les chevaux placés seconds ont parfaitement leur raison d'être; car, la première place étant généralement à la fin de la course disputée par deux chevaux seulement, le cheval arrivant second est réellement celui qui a le plus de valeur après le premier; mais il n'y a presque jamais lieu de parier sur les chevaux placés troisièmes. Cependant, dans les courses importantes, on fait au second des avantages notables, de telle façon que la seconde place se trouve ordinairement disputée par

deux chevaux ; on peut, dans ce cas, parier sur le cheval placé troisième. Nous rechercherons donc quelle probabilité un cheval a d'arriver troisième, afin de fixer sa cote de troisième.

Soient a, b, c, d, ... les cotes de premier. Nous savons comment on en déduit les cotes de second a', b', c', d', ... Cherchons la probabilité qu'a le cheval coté a d'arriver troisième. Supposons que le cheval coté b soit premier ; la probabilité de cet événement est

$$\frac{1}{b+1}.$$

Supposons, en outre, que le cheval coté c soit second ; la probabilité est

$$\frac{1}{c'+1};$$

et, pour que les deux événements arrivent à la fois, la probabilité est

$$\frac{1}{b+1}\,\frac{1}{c'+1}.$$

Alors, pour que le cheval coté a soit troisième, en admettant toujours la même hypothèse déjà adoptée, la probabilité sera

$$\frac{\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{e+1}+\ldots}.$$

Nous représenterons cette fraction par P_{bc}. La probabilité du triple événement sera donc

$$\frac{1}{b+1}\,\frac{1}{c'+1}\,P_{bc}.$$

Mais, le cheval coté b étant premier, tous les autres, sauf celui coté a, peuvent être seconds ; nous aurons donc la

somme

$$\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{c'+1}P_{bc}+\frac{1}{d'+1}P_{bd}+\frac{1}{e'+1}P_{be}+\dots\right).$$

Tous les chevaux peuvent être premiers avec les probabilités $\frac{1}{c+1}$, $\frac{1}{d+1}$, $\frac{1}{e+1}$, ... Nous devrons donc combiner la place de premier de chacun d'eux avec celle de second de tous ceux qui restent, sauf celui coté a. La probabilité cherchée aura pour expression

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{c'+1}P_{bc}+\frac{1}{d'+1}P_{bd}+\frac{1}{e'+1}P_{be}+\frac{1}{f'+1}P_{bf}+\dots\right)\\
&+\frac{1}{c+1}\left(\frac{1}{b'+1}P_{cb}+\frac{1}{d'+1}P_{cd}+\frac{1}{e'+1}P_{ce}+\frac{1}{f'+1}P_{cf}+\dots\right)\\
&+\frac{1}{d+1}\left(\frac{1}{b'+1}P_{db}+\frac{1}{c'+1}P_{dc}+\frac{1}{e'+1}P_{de}+\frac{1}{f'+1}P_{df}+\dots\right)\\
&+\frac{1}{e+1}\left(\frac{1}{b'+1}P_{eb}+\frac{1}{c'+1}P_{ec}+\frac{1}{d'+1}P_{ed}+\frac{1}{f'+1}P_{ef}+\dots\right)\\
&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}=\frac{1}{a''+1}$$

Cette expression est beaucoup trop compliquée pour qu'elle puisse avoir quelque utilité pratique.

V. — *Chevaux placés dans les deux ou trois premiers.*

Si l'on parie peu sur les chevaux placés seconds ou troisièmes, il est un genre de pari très fréquent, c'est celui que l'on fait sur les chevaux *placés*. Le preneur parie que le cheval qu'il désigne arrivera dans les deux premiers ou dans les trois premiers, sans préciser, du reste, l'ordre d'arrivée.

Prenons d'abord le cas d'un cheval placé dans les deux premiers. Nous pourrons facilement, d'après ce qui a été dit, examiner les conditions d'un pareil pari. La probabilité sera égale à la somme des probabilités pour

que le cheval arrive premier et second, ou

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a'+1}.$$

On aura donc, en appelant a_1 la cote qu'il faudra prendre pour ce genre de pari et en remplaçant a' par la valeur précédemment obtenue,

$$(14)\qquad \frac{1}{a_1+1} = \frac{1}{a+1}\left(1+\sum\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}} - \frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}}\right).$$

En faisant la somme de toutes les probabilités, on aurait

$$\sum\frac{1}{a_1+1} = \sum\frac{1}{a+1} + \sum\frac{1}{a'+1} = 2(1+M).$$

Le parieur qui fait son livre pour prendre ou donner tous les chevaux devra gagner ou perdre sur deux d'entre eux. Le chargement ou déchargement sera donc double de sa valeur pour le pari sur un cheval. L'opération serait donc plus avantageuse pour le parieur qui pourrait réussir à faire un livre complet.

Soient trois chevaux présentant les cotes 1, $1\frac{1}{2}$, 4 qui correspondent à un chargement de 0,10. Ces cotes, pour les mêmes chevaux placés dans les deux premiers, deviendront

$$\frac{11}{100},\quad \frac{21}{100},\quad \frac{108}{100}.$$

Dans les courses importantes, on fait des paris sur les chevaux placés dans les trois premiers, quel que soit leur ordre d'arrivée. La probabilité de chaque cheval sera encore la somme des trois probabilités pour les trois places qu'il peut occuper. (*A suivre.*)

SUR LA LIMITE DE $\sum_1^n \frac{1}{p} - \sum_1^m \frac{1}{q}$, LORSQUE p ET q PARCOURENT TOUTES LES VALEURS ENTIÈRES POSITIVES JUSQU'A n ET m RESPECTIVEMENT, ET QUE n ET m AUGMENTENT INDÉFINIMENT, TANDIS QUE LEUR RAPPORT TEND VERS UNE LIMITE DÉTERMINÉE ;

Par M. J.-B. POMEY.

Je considère la série harmonique

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots.$$

Soient S_m la somme de ses m premiers et S_n la somme de ses n premiers termes. Je suppose que m et n tendent vers l'infini, n restant supérieur à m, et le rapport $\frac{n}{m}$ restant fini. Alors on a

$$\lim(S_n - S_m) = \log\left(\frac{n}{m}\right),$$

en mettant $\left(\frac{n}{m}\right)$ pour $\lim \frac{n}{m}$.

On peut le démontrer ainsi : $S_n - S_m$ est la limite de

$$\frac{1}{(n+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\rho}} + \ldots + \frac{1}{m^{1+\rho}},$$

pour $\rho = 0$. Supposons ρ positif; la série $\sum \frac{1}{i^{1+\rho}}$, i parcourant toutes les valeurs entières positives, est conver-

gente, et l'on peut écrire

$$S_n - S_m = \lim \left[\frac{1}{(n+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\rho}} + \dots \right]$$
$$- \lim \left[\frac{1}{(m+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(m+2)^{1+\rho}} + \dots \right].$$

Je vais calculer chacune de ces limites.

Soit $y = \frac{1}{x^{1+\rho}}$ une courbe rapportée à deux axes rectangulaires. J'ai

$$\int_i^{+\infty} y\,dx = \frac{1}{\rho\, i^\rho}.$$

Or la valeur de cette intégrale est représentée par l'aire comprise, du côté des x positifs, entre l'axe des x, la courbe et l'ordonnée $x = i$.

Considérons les rectangles qui ont pour côtés respectivement les ordonnées des points dont les abscisses sont $x = i, i+1, \dots$, et les distances égales à 1 qui séparent ces ordonnées.

Il suffit de faire la figure pour voir clairement que l'aire de ces rectangles sera au total supérieure à l'aire $\int_i^{\infty} y\,dx$. La somme des aires de ces rectangles est

$$\frac{1}{i^{1+\rho}} + \frac{1}{(i+1)^{1+\rho}} + \dots.$$

Si nous considérons de même les rectangles qui ont pour côtés les ordonnées des points dont les abscisses sont $i+1$, $i+2$, ..., et les distances égales à 1 qui séparent les ordonnées $x = i+1$ et $x = i$, $x = i+2$ et $x = i+1$, ..., la somme des aires de ces rectangles sera égale à

$$\frac{1}{(i+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(i+2)^{1+\rho}} + \dots,$$

et sera inférieure à la même aire $\int_i^{+\infty} y\,dx = \frac{1}{\rho\, i^\rho}$.

Donc $\int_i^\infty y\,dx$ sera compris entre les aires des deux séries de rectangles, et l'on peut poser

$$\frac{1}{(i-1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(i+2)^{1+\rho}} + \ldots = \frac{1}{\rho i^\rho} + \theta \frac{1}{i^{1+\rho}},$$

θ étant compris entre o et 1.

Il en résulte que, θ_1 étant de même compris entre o et 1, on aura

$$S_n - S_m = \left[\lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{\rho m^\rho} - \frac{1}{\rho n^\rho}\right) - \theta_1 \lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{n^{1+\rho}}\right)\right],$$

m et n étant infinis.

Je passe à la limite pour $\rho = 0$ et j'ai à trouver la limite de

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{m}\right)^\rho - \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{n}\right)^\rho.$$

Nous aurons le résultat en considérant le rapport des dérivées en ρ, il reste

$$\left(\frac{1}{m}\right)^\rho \log\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{n}\right)^\rho \log\frac{1}{n}.$$

Donc, pour $\rho = 0$, il reste

$$S_n - S_m = \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \left[\log\left(\frac{n}{m}\right) - \theta_1\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right] = \log\left(\frac{n}{m}\right).$$

C. Q. F. D.

Autre démonstration. — Si l'on considère $\int_m^n \frac{dx}{x}$, c'est l'aire comprise entre l'axe des x, les ordonnées $x = m$, $x = n$ et la courbe $y = \frac{1}{x}$. En considérant deux séries de rectangles (qu'on pourrait peut-être appeler

inscrits et circonscrits), on obtient

$$\lim\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\int_m^n\frac{dx}{x}$$

(m et n étant infinis).

Ce procédé revient à faire $\rho = 0$ dès l'abord dans la démonstration précédente. Seulement on doit considérer $\int_m^n \frac{dx}{x}$ au lieu de $\int_m^\infty \frac{dx}{x} - \int_n^\infty \frac{dx}{x}$, car $\int_m^\infty \frac{dx}{x}$ est infini.

Or $\int_m^n \frac{dx}{x}$ ne dépend que de $\frac{n}{m}$; car, posant $x = mx'$, j'ai

$$\int_m^n \frac{dx}{x} = \int_1^{\frac{n}{m}} \frac{dx'}{x'}.$$

Si $\frac{n}{m}$ reste fini, la somme considérée a une limite. Or, en posant

$$\begin{aligned} f_{\frac{n}{m}} &= \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{p}\right) \\ &\quad+\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

on a

$$f_{\frac{n}{m}} = f_{\frac{p}{m}} + f_{\frac{n}{p}}.$$

Posant $\lim\frac{n}{m} = xy$, $\lim\frac{p}{m} = x$, il vient

$$\lim\frac{n}{p} = y$$

et, par suite,

$$f_{xy} = f_x + f_y;$$

de sorte que l'on voit que la limite de la fonction

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

où n et m augmentent indéfiniment, $\frac{n}{m}$ tendant vers une limite déterminée, est égale à

$$\lim \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{-\rho}}{\rho}. \qquad \text{pour } \rho = 0,$$

à $\int_1^{\frac{n}{m}} \frac{dx}{x}$, et jouit de la propriété caractéristique des logarithmes

$$fxy = fx + fy.$$

ERRATA.

TOME IV (3e SÉRIE).

Page 559, ligne 7, *après* diviseur, *lisez* carré.

» 12, *au lieu de* $10^m - 1 +$, *lisez* $10^m - 1 + r$.

Page 560, ligne 15, *au lieu de* e^n, *lisez* e^{2n}.

Page 564, ligne 13, les crochets sont inutiles.

» » 17, *au lieu de* $Q_n(x)$, *lisez* $Q_\infty(x^n)$.

» Dans les énoncés des Questions 59, 60, 61, nous avons oublié de dire que les entiers, dont la somme des carrés est une puissance, doivent être premiers entre eux. *Dans quels cas cette restriction devient-elle superflue?*

Page 565, ligne 4, le dernier exposant n'est pas u_n^n, mais u_n^2.

TOME V (3e SÉRIE).

P. 131, ligne 5, *au lieu de* $\frac{m^2}{s^2}$, *lisez* $\frac{s^2}{m^2}$.

P. 138, ligne 5, en remontant, *au lieu de* ou, *lisez* où.

P. 574, lignes 1 et 3, en remontant, mettre en dénominateur la lettre π.

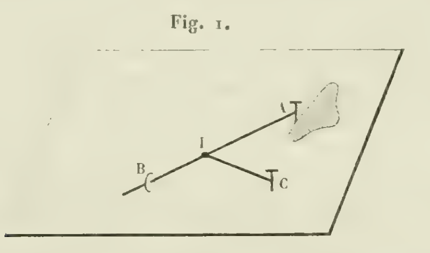
SUR LA THÉORIE DU PLANIMÈTRE D'AMSLER;

PAR M. ARTHUR THIRÉ,

Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur à l'École des Mines d'Ouro-Preto (Brésil).

On connaît l'ingénieux planimètre imaginé par Amsler pour la mesure des surfaces limitées à des courbes planes. Il se compose essentiellement (*fig.* 1) de deux branches CI, AIB articulées en I, et d'une roulette B dont l'axe est la branche AIB. Les extrémités C

Fig. 1.

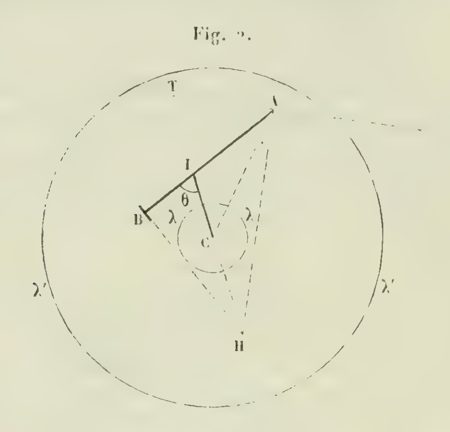


et A des deux branches sont munies de pointes. Quand l'instrument est placé sur un dessin, ses trois points d'appui sont les pointes C, A, et la roulette B. Les branches CI, AIB sont parallèles au plan du dessin; les pointes C et A lui sont perpendiculaires; le plan moyen de la roulette lui est aussi perpendiculaire. La pointe C est aiguë; on peut la fixer en l'enfonçant légèrement dans le dessin et même dans la planchette sur laquelle est collé le dessin : c'est le *pôle* du planimètre. La pointe A est une simple pointe sèche ou style, destinée à suivre le contour d'une figure tracée sur le dessin. Lorsque, maintenant fixe la pointe C, on fait parcourir à la pointe A un arc de courbe quelconque, on déter-

mine un certain roulement de la roulette; la valeur de ce roulement et l'aire de certaines surfaces qui dépendent de l'arc de courbe parcouru sont liées par une relation assez simple que nous nous proposons d'établir, et d'où se déduit la théorie du planimètre.

Soient (*fig.* 2) C le pôle du planimètre, A la pointe

Fig. 2.



mobile, CI, AIB les deux branches du planimètre, articulées en I.

La roulette a son centre en B à l'extrémité de la branche AIB.

Je désignerai par a la longueur IA, b la longueur IB, c la longueur IC, ρ le rayon vecteur variable CA.

Dans le triangle CIA, on a

$$a - c < \rho < a + c.$$

Il en résulte que, si l'on décrit deux circonférences du même centre C avec les rayons $(a - c)$ et $(a + c)$, la pointe mobile A sera située nécessairement dans l'espace annulaire compris entre ces deux circonférences limites que je représente en $\lambda\lambda$ et $\lambda'\lambda'$. J'appellerai cet espace annulaire la *zone d'action* du planimètre. Pour

que l'on puisse faire suivre à la pointe A un certain arc de courbe, il faut que cet arc soit tout entier contenu dans cette zone d'action.

Imaginons que la branche CI reste fixe et que la branche AIB tourne autour de l'articulation I. La pointe A décrira un cercle, et la roulette B roulera sans glisser. J'appellerai *cercles de roulement* tous les cercles qui, lorsqu'ils sont ainsi décrits par la pointe A, conduisent à un mouvement de roulement sans glissement de la roulette.

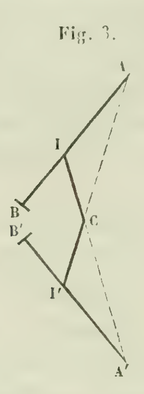
Quand la pointe A décrit un cercle de roulement, le point de contact de la roulette décrit sur le papier un cercle concentrique γ. Imaginons les trajectoires orthogonales des cercles γ. Quand le point de contact de la roulette décrit sur le papier une de ces trajectoires orthogonales, la pointe A décrit une courbe que j'appellerai *courbe de glissement* : il y a alors glissement sans roulement de la roulette.

Construisons la tangente en A à la courbe de glissement qui passe par ce point. Pour cela, déterminons le centre instantané de rotation de la branche AIB lorsque la pointe A décrit un élément de courbe de glissement. Ce centre instantané est le point d'intersection H de la branche IC et de la perpendiculaire à BA menée par le point B. En joignant HA, nous aurons en HA la normale en A à la courbe de glissement. AT perpendiculaire à AH est la tangente en A à cette courbe.

Soit CAIB (*fig.* 3) la position actuelle du planimètre. Considérons un second planimètre CA′I′B′ de mêmes dimensions que le premier, ayant même pôle C, ayant sa branche CI′ dans le prolongement du rayon vecteur CA et ayant son rayon vecteur CA′ dans le prolongement de la branche CI. A chaque position du planimètre CAIB correspond une position du planimètre

CA'I'B'. Il est clair que la position du premier planimètre se déduit de la position du second, de la même façon que la position du second de la position du premier. Nous appellerons ces deux planimètres *conjugués*.

Fig. 3.



Lorsque la pointe A du premier planimètre décrit une courbe, la pointe A' du planimètre conjugué décrit une courbe que nous appellerons conjuguée de la première. Les points correspondants de ces deux courbes se rapportent à des positions correspondantes des pointes A et A'; nous appellerons ces points *conjugués*. Enfin nous appellerons *surfaces*, ou plus généralement *figures conjuguées*, deux surfaces ou figures dont tous les points seront deux à deux conjugués.

Une droite passant par le pôle C a évidemment pour conjuguée la circonférence d'un cercle de roulement, et inversement. Un arc de cercle ayant son centre au pôle C a pour conjugué un arc de cercle égal appartenant à la même circonférence.

Deux surfaces conjuguées sont limitées par des courbes de forme différente, mais ont des aires égales. En effet, décomposons ces surfaces conjuguées en tranches courbes infiniment minces par une série de cercles concentriques,

de centre C, infiniment rapprochés les uns des autres. Dans les deux surfaces, ces tranches courbes infiniment minces se correspondent et sont conjuguées deux à deux. Deux tranches infiniment minces conjuguées ont évidemment même épaisseur et même longueur et, par conséquent, ont des aires égales.

Cette égalité des aires de deux surfaces conjuguées nous sera utile plus loin.

Lorsque la pointe A du planimètre se déplace d'une manière quelconque, le roulement de la roulette correspond à chaque instant à la composante, suivant une perpendiculaire à la branche BA, du chemin suivi par cette roulette. Établissons l'expression du roulement de la roulette pour un déplacement quelconque de la pointe A.

Rapportons les positions de la branche CI à une direction fixe, et appelons ω l'angle variable que la branche CI fait avec cette direction fixe.

Appelons θ l'angle variable CIB.

Considérons d'abord un déplacement infiniment petit de la pointe A du planimètre.

Soient, pour ce déplacement infiniment petit, dz le roulement de la roulette, $d\theta$ l'accroissement de θ, $d\omega$ l'accroissement de ω.

Le déplacement infiniment petit de la pointe A peut être décomposé en deux déplacements suivant un cercle de roulement et une courbe de glissement.

Soit $d\theta'$ l'accroissement de θ relatif au déplacement composant suivant un cercle de roulement.

Soit $d\theta''$ l'accroissement relatif au déplacement composant suivant une courbe de glissement.

On a

$$(1) \qquad d\theta = d\theta' + d\theta''.$$

Des deux déplacements composants, un seul fait rouler

la roulette : c'est le déplacement suivant un cercle de roulement. Le roulement correspondant dz de la roulette a pour valeur absolue

$$b\,d\theta'.$$

Pour fixer le signe à attribuer à cette valeur, il faut fixer, pour la roulette, le sens des rotations positives. Nous prendrons pour sens positif des rotations de la roulette le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une montre par rapport à un observateur placé en I. Avec cette convention, nous aurons, en grandeur et en signe,

$$(2) \qquad dz = -b\,d\theta'.$$

Cherchons maintenant l'expression de $d\theta''$.

Pendant le déplacement composant suivant la courbe de glissement, CI tourne autour de C de l'angle $d\omega$. La branche BA tourne autour du centre instantané de rotation H d'un angle facile à déterminer : en effet, I décrit, pendant ce déplacement, l'arc $c\,d\omega$, et, par conséquent, l'angle de la rotation autour de H est

$$\frac{c\,d\omega}{\mathrm{IH}} \quad \text{ou} \quad \frac{c\cos\theta\,d\omega}{b}.$$

L'accroissement $d\theta''$ de l'angle θ résulte des déplacements angulaires des deux côtés IB, IC de cet angle et a évidemment pour expression la différence des déplacements angulaires de ces côtés. On a donc

$$(3) \qquad d\theta'' = \frac{c\cos\theta\,d\omega}{b} - d\omega.$$

Éliminons $d\theta'$ et $d\theta''$ entre (1), (2) et (3). Il vient

$$(4) \qquad dz = c\cos\theta\,d\omega - b(d\theta + d\omega).$$

Or, dans le triangle CIA, on a

$$\rho^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta,$$

d'où

$$c\cos\theta = \frac{\rho^2 - a^2 - c^2}{2a}.$$

Portons cette valeur de $c\cos\theta$ dans (4). Il vient

$$a\,dz = \frac{\rho^2 - a^2 - c^2}{2}\,d\omega - ab(d\theta + d\omega)$$

ou

$$(5)\qquad a\,dz = \frac{1}{2}\rho^2\,d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,d\omega - ab\,d\theta.$$

Cette équation (5) est relative à un déplacement élémentaire quelconque de la pointe A du planimètre. Appliquons-la à un déplacement fini quelconque de cette pointe A. Pour cela, intégrons. Il vient, en appelant z le roulement total de la roulette,

$$(6)\qquad az = \frac{1}{2}\int\rho^2\,d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\int d\omega - ab\int d\theta.$$

Cette équation fondamentale donne directement la théorie du planimètre, comme je vais le montrer un peu plus loin.

Ordinairement, les divisions marquées sur la roulette du planimètre d'Amsler et sur le compteur qui enregistre le nombre de tours correspondent au roulement vrai z multiplié par la longueur a de la branche IA de l'instrument. On lit donc directement, sur l'instrument, la valeur du produit az qui représente le premier membre de l'équation (6) : c'est ce que nous appellerons le *roulement accusé* par l'instrument.

Remarquons que le terme $\frac{1}{2}\int\rho^2\,d\omega$ représente l'aire d'un secteur limité à deux rayons rectilignes issus de C et à la courbe conjuguée de la courbe décrite par la pointe A du planimètre; car le rayon vecteur CA′ du

planimètre conjugué est constamment égal au rayon vecteur CA ou ρ du planimètre CAIB; en outre, les déplacements angulaires successifs de CA' sont égaux aux déplacements angulaires successifs $d\omega$ de la branche CI dans le prolongement de laquelle il se trouve.

Appliquons la formule fondamentale (6) à divers cas.

Premier cas : *Courbe fermée, le pôle étant à l'extérieur de cette courbe.* — Si la pointe A parcourt une courbe fermée qui laisse le pôle en dehors de la surface limitée par cette courbe, l'équation (6) se réduit à

$$a z = \tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega.$$

Or $\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$ est l'aire de la surface conjuguée de la surface limitée par la courbe fermée décrite par la pointe A du planimètre. A cause de l'égalité des aires de deux surfaces conjuguées, on conclut que, dans ce cas, *le roulement accusé par le planimètre représente l'aire limitée par la courbe fermée décrite par la pointe de l'instrument.*

Deuxième cas : *Courbe fermée, le pôle étant à l'intérieur de cette courbe.* — Dans ce cas, la branche CI effectue une révolution complète, et $\int d\omega$ a, par conséquent, pour valeur 2π. L'équation (6) se réduit alors à

$$a z = \tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega - \pi(a^2 + c^2 + 2ab)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega = a z + \pi(a^2 + c^2 + 2ab).$$

On en conclut que, dans ce cas, *l'aire limitée par la courbe fermée décrite par la pointe du planimètre a pour valeur le roulement accusé par l'instrument, augmenté de la constante $\pi(a^2 + c^2 + 2ab)$.*

Troisième cas : *Arc de courbe dont les extrémités sont à égale distance du pôle.* — Considérons, d'une

part, le secteur limité à cet arc et à deux rayons issus du pôle et, d'autre part, le secteur limité à l'arc conjugué et à deux rayons issus du pôle. On vérifie aisément que ces deux secteurs ont même surface, en les décomposant en tranches infiniment minces par des cercles concentriques ayant le pôle pour centre.

Appliquons la formule (6) à l'arc du premier secteur. Les extrémités de cet arc étant à la même distance du pôle, les valeurs initiale et finale de θ sont égales, et l'on a

$$\int d\theta = 0.$$

En appelant Ω l'angle au centre de ce secteur, on a

$$\int d\omega = \Omega.$$

La formule (6) devient donc

$$a z = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,\Omega$$

ou

$$\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega = a z + \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,\Omega.$$

$\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$ représente indifféremment la surface de l'un ou l'autre des deux secteurs que nous avons considérés et dont les aires sont égales. De cette dernière équation, on conclut que *l'aire du secteur limité par un arc de courbe dont les extrémités sont à égale distance du pôle a pour valeur le roulement accusé par le planimètre (lorsque la pointe de l'instrument parcourt cet arc) augmenté du terme* $\frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,\Omega$, *qui est proportionnel à l'angle au centre du secteur.*

Quatrième cas : *Arc de courbe quelconque.* — Pour un arc de courbe ouvert quelconque, l'équation (6) donne

$$a z = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}(\omega_2 - \omega_1) - ab(\theta_2 - \theta_1).$$

ω_1 et θ_1 étant les valeurs initiales de ω et θ, ω_2 et θ_2 étant leurs valeurs finales.

Si l'on pose

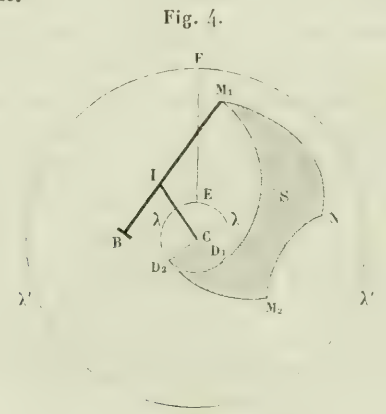
$$r^2 = a^2 + c^2 + 2ab,$$
$$r'^2 = 2ab,$$

on arrive à cet énoncé :

Le roulement accusé par le planimètre, lorsque la pointe parcourt un arc de courbe quelconque, représente l'aire du secteur limité à l'arc conjugué et à deux rayons issus du pôle, diminuée de la somme des aires de deux secteurs circulaires ayant l'un pour rayon r et pour angle au centre l'accroissement $(\omega_2 - \omega_1)$ *de* ω, *l'autre pour rayon* r' *et pour angle au centre l'accroissement* $(\theta_2 - \theta_1)$ *de* θ.

Des trois termes qui figurent dans l'expression de az, les deux derniers dépendent seulement des positions initiale et finale du planimètre ; le premier terme dépend des positions intermédiaires par lesquelles passe l'instrument.

Fig. 4.



Soit M_1NM_2 (*fig.* 4) l'arc de courbe quelconque dé-

crit par la pointe du planimètre. Considérons le secteur limité à l'arc $M_1 N M_2$ et aux deux rayons vecteurs mixtilignes CD_1M_1, CD_2M_2 formés par les rayons CD_1, CD_2 du cercle $\lambda\lambda$ [cercle de centre C et de rayon $(a-c)$] et par les cercles de roulement D_1M_1, D_2M_2. On voit aisément que la surface S de ce secteur est égale à la surface du secteur limité à l'arc de courbe conjugué, et qui a pour expression

$$\tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega.$$

On a donc, pour nouvelle expression du roulement de la roulette,

$$az = S - \tfrac{1}{2}r^2(\omega_2 - \omega_1) - \tfrac{1}{2}r'^2(\theta_2 - \theta_1).$$

Cinquième cas : *La pointe de l'instrument parcourt, suivant la direction d'un rayon, la largeur entière* EF *de la zone d'action du planimètre* (*fig.* 4). — La courbe conjuguée du chemin parcouru EF est une demi-circonférence de cercle de roulement. Le secteur, dont l'aire a pour valeur $\frac{1}{2}\int\rho^2\,d\omega$, est un demi-cercle de rayon a. On a donc, dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega = \frac{\pi a^2}{2};$$

ω variant de o à π, et θ variant de π à o, on a

$$\int d\omega = \pi,$$
$$\int d\theta = -\pi.$$

L'expression de az devient ainsi

$$az = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\pi + ab\pi$$

ou, en simplifiant,

$$z = -\frac{\pi c^2}{2a}.$$

Il convient d'observer que ce roulement z est indé-

pendant de b, et, par conséquent, qu'il est le même, quelle que soit la position de la roulette sur la barre AI.

De là on déduit accessoirement le théorème suivant :

Dans le mouvement d'une manivelle CI *et d'une bielle* IA *dont l'extrémité* A *se meut suivant une direction passant par le centre* C *de la manivelle, si diverses roulettes de même rayon sont montées en divers points de la bielle* IA *qui leur sert d'axe commun, de façon qu'elles puissent rouler sur un plan* P *parallèle au plan de la manivelle et de la bielle, le roulement de toutes ces roulettes est le même pour une demi-révolution de la manivelle entre ses deux points morts : ce roulement commun aux diverses roulettes a pour expression*

$$\frac{\pi \overline{\mathrm{CI}}^2}{2\,\mathrm{AI}}.$$

SUR LES SOMMES DES PRODUITS k A k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) DES NOMBRES NATURELS;

Par M. V. MOLLAME,
Professeur à l'Université de Catane (Sicile).

Soit $S_{k,n}$ la somme de tous les produits k à k des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. On aura

$$S_{k,n} = 0, \qquad \text{si} \qquad k > n,$$

et

$$S_{k,n} = n!, \qquad \text{si} \qquad k = n.$$

Faisons, par convention,

$$S_{0,0} = 1; \qquad S_{0,n} = 1, \qquad S_{0,-1} = 1.$$

Cela posé, si n, r, μ, ω sont des nombres entiers po-

sitifs, et a, b deux nombres quelconques, on aura la relation

$$(1)\quad \begin{cases} (a+b)^{n-\omega} S_{\omega,n-1} \\ \displaystyle =\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1} S_{\omega-\mu,n-r-1} a^{r-\mu} b^{n-\omega-(r-\mu)}. \end{cases}$$

On sait, en effet, que, en posant

$$1+\frac{a}{1}x+\frac{a(a+k)}{2!}x^2+\frac{a(a+k)(a+2k)}{3!}x^3+\ldots$$
$$+\frac{a(a+k)\ldots[a+(m-1)k]}{m!}x^m=\varphi(a),$$

où m est un nombre entier, aussi grand qu'on veut, on a

$$\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(a+b),$$

et, pour cela, si l'on désigne par A_r, B_s, C_n, respectivement, les coefficients de x^r, x^s, x^n dans $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(a+b)$, on aura

$$(\alpha)\qquad C_n=\Sigma A_r B_s \quad \begin{Bmatrix} r=0,1,2,\ldots,n \\ s=n,n-1,n-2,\ldots,0 \end{Bmatrix}.$$

Cependant on a

$$A_r=\frac{1}{r!}a(a+k)(a+2k)\ldots[a+(r-1)k],$$

c'est-à-dire

$$A_r=\frac{1}{r!}(S_{0,r-1}a^r+S_{1,r-1}a^{r-1}k$$
$$+S_{2,r-1}a^{r-2}k^2+\ldots+S_{r-1,r-1}ak^{r-1})$$

et, pareillement,

$$B_s=\frac{1}{s!}(S_{0,s-1}b^s+S_{1,s-1}b^{s-1}k$$
$$+S_{2,s-1}b^{s-2}k^2+\ldots+S_{s-1,s-1}bk^{s-1}),$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} C_n=\dfrac{1}{n!}[S_{0,n-1}(a+b)^n \\ \qquad +S_{1,n-1}(a+b)^{n-1}k+\ldots+S_{n-1,n-1}(a+b)k^{n-1}]. \end{cases}$$

Le terme de A_r qui contient k^μ et celui de B_s qui contient k^ν sont, respectivement,

$$\frac{1}{r!} S_{\mu,r-1} a^{r-\mu} k^\mu, \qquad \frac{1}{s!} S_{\nu,s-1} b^{s-\nu} k^\nu,$$

et, pour cela, le terme avec $k^{\mu+\nu}$ dans $A_r B_s$ est

$$\frac{1}{r!\,s!} S_{\mu,r-1} S_{\nu,s-1} a^{r-\mu} b^{s-\nu} k^{\mu+\nu};$$

donc, en posant $\mu + \nu = \omega$,

$$\sum \frac{1}{r!\,s!} S_{\mu,r-1} S_{\nu,s-1} a^{r-\mu} b^{s-\nu} \quad \left\{ \begin{matrix} r = 0, 1, 2, \ldots, \omega \\ s = \omega, \omega - 1, \omega - 2, \ldots, 0 \end{matrix} \right\}$$

sera le coefficient de k^ω dans $A_r B_s$; on peut l'écrire encore

$$\frac{1}{r!\,s!} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1} S_{\omega-\mu,s-1} a^{r-\mu} b^{s-\omega+\mu},$$

et, pour cela, le coefficient de k^ω dans C_n sera, à l'aide de l'égalité (α),

$$\sum \frac{1}{r!\,s!} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1} S_{\omega-\mu,s-1} a^{r-\mu} b^{s-\omega+\mu}$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots, n;\ s = n, n-1, n-2, \ldots, 0)$$

ou, étant $s = n - r$ et $\frac{1}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r} \frac{1}{n!}$,

$$\frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1} S_{\omega-\mu,s-1} a^{r-\mu} b^{n-\omega-r+\mu}.$$

Mais le coefficient de k^ω dans C_n est, en vertu de l'égalité (β),

$$\frac{1}{n!} S_{\omega,n-1} (a+b)^{n-\omega};$$

on a donc la relation (1), par suite de l'égalité des deux expressions du coefficient de k^ω.

Si $\omega = 0$, l'égalité (1) donne le théorème du binôme pour un exposant entier et positif.

2. On a aussi

$$\left\{\begin{aligned}&\binom{n-\omega+1}{p} S_{\omega,n}\\&\quad= \binom{n+1}{p} S_{0,p-1} S_{\omega,n-p} + \binom{n+1}{p+1} S_{1,p} S_{\omega-1,n-p-1}\\&\qquad+ \binom{n+1}{p+2} S_{2,p+1} S_{\omega-2,n-p-2} + \ldots + \binom{n+1}{\omega+p} S_{\omega,p+\omega-1} S_{0,n-p-\omega},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$(2') \qquad \binom{n-\omega+1}{p} S_{\omega,n} = \sum_{r=0}^{r=\omega} \binom{n+1}{p+r} S_{r,p+r-1} S_{\omega-r,n-p-r}.$$

En effet, si l'on pose, dans l'équation (1), $r - \mu = p$ et que l'on prenne, dans le second signe Σ, le terme qui résulte lorsque $\mu = r - p$,

$$\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r+p,n-r-1}\, a^p b^{n-\omega-p}$$

sera la partie du second membre de l'équation (1) où figure $a^p b^{n-\omega-p}$. Dans la précédente expression, la valeur la plus petite que peut recevoir r dans $S_{r-p,r-1}$, c'est $r = p$. La valeur la plus grande que la même quantité r peut avoir dans $S_{\omega-r-p,n-r-1}$, c'est $r = \omega - p$, de manière que

$$\sum_{r=p}^{r=\omega+p} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r+p,n-r-1}$$

sera le coefficient de $a^p b^{n-\omega-p}$ dans le second membre de l'équation (1); mais le coefficient de $a^p b^{n-\omega-p}$ donné par le premier membre de la même égalité, c'est

$\binom{n-\omega}{p} S_{\omega,n-1}$: donc

$$\binom{n-\omega}{p} S_{\omega,n-1} = \sum_{r=p}^{r=\omega+p} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r+p,n-r-1},$$

et, si l'on change, dans cette dernière égalité, n en $n+1$ et r en $r+p$, on aura l'équation (2′).

On a encore

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(n-k+1)S_{k,n} \\ &\quad = \sum_{r=0}^{r=k} \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+1)}{n+1} S_{k-r,n-r-1}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire

$$(3')\quad \left\{ \begin{aligned} &(n-k+1)S_{k,n} \\ &\quad = \frac{n+1}{1} S_{k,n-1} + \frac{(n+1)n}{2} S_{k-1,n-2} \\ &\quad + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} S_{k-2,n-3} + \ldots \\ &\quad + \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k+1} S_{0,n-k-1}. \end{aligned} \right.$$

On obtient l'égalité précédente par le changement de k en ω dans l'équation (2) : dans celle-ci, on fera $p=1$, et l'on se rappellera que

$$S_{r,r} = 1$$

et que

$$\binom{n+1}{r+1} r! = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r+1}.$$

On a pareillement

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} S_{k,n} = n S_{k-1,n-1} &+ (n-1)S_{k-1,n-2} \\ &+ (n-2)S_{k-1,n-3} + \ldots + k S_{k-1,n-1}. \end{aligned} \right.$$

En effet, dans $S_{k,n}$, il y a des produits qui ont le facteur n. Ce sont ceux qui ont pour somme $n S_{k-1,n-1}$; les autres produits n'ont pas le facteur n et donnent pour

somme $S_{k,n-1}$, de sorte que l'on a

$$(5)\qquad S_{k,n} = n S_{k-1,n-1} + S_{k,n-1}.$$

L'équation (4) est une conséquence immédiate de l'équation (5).

Si, dans l'équation (3′), on introduit la valeur de $S_{k,n-1}$ donnée par l'équation (5), on aura

$$\begin{aligned} k S_{k,n} = n(n+1) S_{k-1,n-1} &- \left[\frac{(n+1)n}{2} S_{k-1,n-2} \right. \\ &\quad + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} S_{k-2,n-3} + \ldots \\ &\quad \left. \pm \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k+1} S_{0,n-k+1} \right]. \end{aligned}$$

Cette égalité est la plus avantageuse, parmi les autres, par le calcul récurrent des quantités S.

On voit très facilement que

$$S_{0,n} + S_{1,n} + S_{2,n} + \ldots + S_{n,n} = (n+1)!$$

$$S_{0,n} + S_{2,n} + S_{4,n} + \ldots = S_{1,n} + S_{3,n} + S_{5,n} + \ldots = \tfrac{1}{2}(n+1)!$$

si l'on fait $x = \pm 1$ dans l'identité

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+n) = S_{0,n} x^n + S_{1,n} x^{n-1} + \ldots + S_{n,n}.$$

On a, en particulier,

$$S_{2,n} = \frac{1}{4!}(n+1)n(n-1)(3n+2),$$

$$S_{3,n} = \frac{1}{4!\,.\,2}(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2),$$

$$\begin{aligned} S_{4,n} = \frac{1}{5!\,.\,2^4\,.\,3}&(n+1)n(n-1)(n-2) \\ &\times (n-3)(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8). \end{aligned}$$

. . . .

L'équation (4) donne pour $S_{2,n}$ la valeur

$$\begin{aligned} S_{2,n} = \tfrac{1}{2}[\,n^2(n-1) &+ (n-1)^2(n-2) \\ &+ (n-2)^2(n-3) + \ldots + 2^2\,.\,1\,]. \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$2S_{2,n} = n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 2^3$$
$$- n^2 - (n-1)^2 - \ldots - 2^2,$$

$$2S_{2,n} + 2 = \sum_1^n k^3 - \sum_1^n k^2.$$

Les deux précédentes valeurs de $S_{2,n}$ donnent lieu à l'identité

$$1.2^2 + 2.3^2 + \ldots + (n-1)n^2$$
$$= \frac{1}{3.4}(n+1)n(n-1)(3n+2).$$

On pourrait avoir d'autres identités par la comparaison des valeurs de $S_{3,n}$, $S_{4,n}$, ...

DE LA DÉVIATION DANS L'ELLIPSE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Soient γ' et γ'' deux cercles concentriques. Par le centre O de ces cercles menons deux axes rectangulaires Ox et Oy.

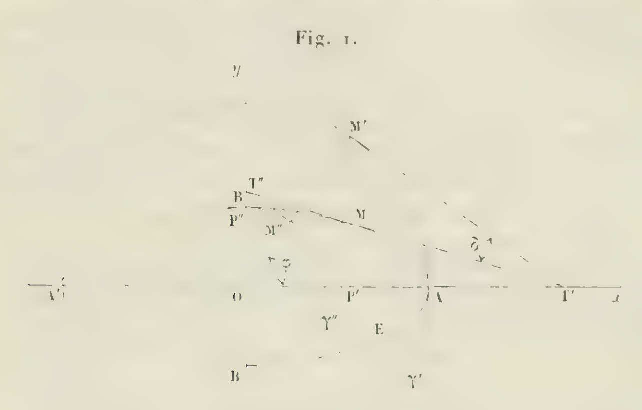
Si une droite $OM''M'$ qui coupe le cercle γ' en M' et le cercle γ'' en M'' pivote autour du point O, et que, pour chaque position de cette droite, on tire la droite $M'M$ parallèle à Oy et la droite $M''M$ parallèle à Ox, le lieu du point de rencontre M de ces deux droites est une ellipse E ayant pour grand axe le diamètre AA' du cercle γ' dirigé suivant Ox et pour petit axe le diamètre BB' du cercle γ'' dirigé suivant Oy.

C'est là un résultat connu, et d'ailleurs bien facile à établir.

Le cercle γ' est ce qu'on appelle le *cercle principal*

de l'ellipse E. C'est le lieu des projections des foyers réels de l'ellipse E sur les tangentes à cette courbe. De même le cercle γ'' est le lieu des projections des foyers

Fig. 1.



imaginaires de l'ellipse E sur ses tangentes. On pourrait l'appeler le *second cercle principal*.

Le rapport $\frac{M'P'}{MP'}$ étant constant, les tangentes M'T' et MT' qui se correspondent sur le premier cercle principal γ' et sur l'ellipse E se coupent en T', sur l'axe Ox. C'est encore une propriété bien connue dont la démonstration est des plus faciles.

De même le point de rencontre T'' des tangentes à l'ellipse E au point M et au cercle γ'' au point M'' se trouve sur Oy.

En somme, la tangente en M s'obtient en joignant le point de rencontre T' de la tangente en M' avec Ox, au point de rencontre T'' de la tangente en M'' avec Oy.

Les tangentes M'T' et M''T'' sont parallèles. J'appelle *déviation de l'ellipse au point* M *l'angle que la tan-*

gente à l'ellipse en ce point fait avec les tangentes correspondant aux cercles principaux. Je désignerai cet angle par la lettre δ.

Je rappelle en outre que l'angle $M'Ox$ ou φ porte le nom d'*anomalie excentrique* de l'ellipse au point M.

2. Les cercles γ' et γ'' étant connus, tout point M de l'ellipse est évidemment déterminé par la connaissance seule de son anomalie excentrique φ. Voyons comment la déviation δ est donnée en fonction de φ.

On a

$$\delta = \widehat{M'T'O} - \widehat{MT'O}.$$

Or

$$\tang \widehat{M'T'O} = \cot\varphi,$$

$$\tang \widehat{MT'O} = \frac{b}{a}\cot\varphi.$$

Donc

$$\tang\delta = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\cot\varphi}{1 + \frac{b}{a}\cot^2\varphi}$$

ou

$$(1) \qquad \tang\delta = \frac{(a-b)\sin\varphi\cos\varphi}{a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi}.$$

Lorsque l'angle φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le point M décrit le quart d'ellipse AB, l'angle δ part de zéro, croît jusqu'à un certain maximum et décroît ensuite jusqu'à zéro.

Nous appellerons le point M_1 où la déviation δ atteint son maximum δ_1 un *point de déviation maxima*. Il y a évidemment quatre points de déviation maxima symétriques deux à deux, soit par rapport aux axes, soit par rapport au centre.

Pour obtenir la déviation maxima δ_1, annulons la dé-

rivée de l'expression (1); cela nous donne, en appelant φ_1 l'anomalie excentrique correspondante,

$$(a \sin^2\varphi_1 + b \cos^2\varphi_1)(-\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)$$
$$- \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 (2a \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - 2b \sin\varphi_1 \cos\varphi_1) = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$-a \sin^2\varphi_1 + b \cos^2\varphi_1 = 0,$$

c'est-à-dire

(2) $$\operatorname{tang}\varphi_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

La tangente de l'anomalie excentrique du point de déviation maxima situé sur le premier quart de l'ellipse est égale à la racine carrée du rapport des demi-axes.

Il est facile de construire le point M_1. En effet, il suffit, pour cela, de connaître la position correspondante $OM''_1M'_1$ de la droite $OM''M'$. Or cette droite fait avec Ox l'angle φ_1, et l'on a

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{b}{\sqrt{ab}}.$$

Donc, si l'on porte sur OB' la longueur $OA_1 = OA$ [1], et que le cercle décrit sur BA_1 comme diamètre coupe OA au point C, la droite $OM''_1M'_1$ passe par le milieu de BC. On déduit de là le point M_1 et, par symétrie relativement aux axes et au centre, les trois autres points de déviation maxima.

Portant la valeur de φ_1, tirée de (2), dans (1), on en déduit, pour la déviation maxima δ_1,

(3) $$\operatorname{tang}\delta_1 = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

De cette formule on déduit immédiatement les suivantes :

$$\cos\delta_1 = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} : \qquad (3')$$

le cosinus de la déviation maxima est égal au rapport de la moyenne géométrique des demi-axes à leur moyenne arithmétique ; et

$$\sin\delta_1 = \frac{a-b}{a+b} : \qquad (3'')$$

le sinus de la déviation maxima est égal au rapport de la différence des demi-axes à leur somme.

3. Les coordonnées x_1 et y_1 du point M_1 sont bien faciles à calculer. On a, en effet,

$$x_1 = a\cos\varphi_1,$$
$$y_1 = b\sin\varphi_1.$$

Or la formule (2) donne

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

Donc

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{a^3}{a+b}, \\[2mm] y_1^2 = \dfrac{b^3}{a+b}. \end{cases}$$

Une première conséquence des formules (4), c'est que *les points de déviation maxima se trouvent à la rencontre de l'ellipse donnée et du cercle* Δ *dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2.$$

Sur le demi-axe $OA = a$, portons les segments OH et AK tous deux égaux à b [1], le premier dans le sens de O vers A, le second dans le sens de A vers O, et décrivons des cercles sur AH et AK comme diamètres. *Le cercle* Δ *passe par les points diamétralement opposés aux points de contact des tangentes issues de* O *dans les cercles* AH *et* AK. *Cela résulte de ce que l'on a*

$$a^2 - ab + b^2 = ab + (a - b)^2$$

et

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)a + b^2.$$

4. La tangente à l'ellipse E au point M_1 coupe Ox en T'_1 et Oy en T''_1 [1]. Posons $OT'_1 = \alpha_1$ et $OT''_1 = \beta_1$. Nous avons

$$\alpha_1 = \frac{a^2}{x_1} = \frac{a^2\sqrt{a+b}}{a\sqrt{a}},$$

Donc

$$(5) \qquad \alpha_1^2 = a(a+b);$$

de même,

$$(5') \qquad \beta_1^2 = b(a+b).$$

Des formules (6) et (6') nous tirons d'abord

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{b}{a}.$$

Comparant avec la formule (2), nous voyons que

$$\widehat{T''_1 T'_1 O} = \varphi_1.$$

Par suite, la tangente $T'_1 T''_1$ est parallèle à la droite BC construite précédemment.

Les formules (5) et (5') nous donnent encore

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = (a+b)^2$$

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

ou

$$T'_1 T''_1 = a + b.$$

D'ailleurs,

$$\frac{T'_1 M_1}{T_1 T''_1} = \frac{y_1}{\beta_1} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \frac{1}{\sqrt{b(a+b)}} = \frac{b}{a-b}.$$

Donc

$$T'_1 M_1 = T'_1 T''_1 \frac{b}{a-b} = (a+b)\frac{b}{a+b} = b$$

et, par suite,

$$T'_1 M_1 = a.$$

Le segment de la tangente en un point de déviation maxima, compris entre ce point et l'un des axes, est égal à la moitié de l'autre axe.

Ce résultat peut être présenté sous une autre forme que voici :

Si une droite de longueur constante glisse entre deux axes rectangulaires, tout point de cette droite décrit une ellipse. Les points de déviation maxima sur l'une quelconque de ces ellipses sont donnés par les points où la droite mobile devient tangente à cette ellipse.

On peut encore, en remarquant que l'enveloppe de la droite de longueur constante est une hypocycloïde à quatre rebroussements, dire que :

Si l'on considère une série d'ellipses ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites, et telles que la somme des longueurs de leurs axes soit constante, toutes ces ellipses sont tangentes à une hypocycloïde à quatre rebroussements qu'elles touchent par leurs points de déviation maxima.

Les formules (5) et (5') nous donnent aussi

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = a^2 - b^2.$$

Cette relation exprime que *l'ellipse ayant pour demi-axes* OT_1 *et* OT'_1 *est homofocale à l'ellipse* E.

De là ce théorème :

L'ellipse homofocale à une ellipse donnée, et qui est inscrite dans le losange dont les sommets sont les sommets de cette ellipse, touche les côtés de ce losange par ses points de déviation maxima.

Enfin on peut remarquer qu'il résulte des formules (5) et (5′) que

$$\alpha_1\beta_1 = (a+b)\sqrt{ab}$$

ou

$$2\alpha_1\beta_1 = \frac{2a+2b}{2}\sqrt{2a.2b}.$$

La surface du losange formé par les tangentes menées à une ellipse par ses points de déviation maxima est égale au produit de la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique des axes de cette ellipse.

5. La longueur du rayon de courbure en un point de l'ellipse E est donnée, abstraction faite du signe, par la formule

$$\rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Si, dans cette formule, nous substituons les valeurs (4) des coordonnées du point de déviation maxima M_1, nous obtenons, après une réduction facile, pour le rayon de courbure ρ_1 en ce point, la valeur

$$(6) \qquad \rho_1 = \sqrt{ab}.$$

Le rayon de courbure en un point de déviation maxima d'une ellipse est égal à la moyenne géométrique des demi-axes de cette ellipse.

C'est une assez remarquable propriété.

Observant que les rayons de courbure aux sommets de l'ellipse ont respectivement pour valeurs $\frac{a^2}{b}$ et $\frac{b^2}{a}$, on peut encore dire que *le rayon de courbure en un point de déviation maxima est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure en un sommet du grand axe et en un sommet du petit axe.*

La formule précédente montre également que *la surface du cercle osculateur en un point de déviation maxima d'une ellipse est égale à la surface de cette ellipse.*

Nous avons vu (n° 4) que, si la tangente au point de déviation maxima M_1 coupe Ox en T'_1 et Oy en T''_1, on a $M_1T'_1 = b$, $M_1T''_1 = a$. Rapprochant cette propriété de la formule précédente, on en déduit que :

Le cercle qui a pour diamètre le segment, compris entre les axes, de la tangente en un point de déviation maxima, passe par le centre de courbure répondant à ce point.

Menons par le point M_1 (1) une droite telle que les bissectrices des angles qu'elle forme avec la tangente $T'_1T''_1$ soient parallèles aux axes. Cette droite coupe l'axe Ox en S'_1, l'axe Oy en S''_1, et l'on a

$$M_1S'_1 = M_1T'_1 = b,$$
$$M_1S''_1 = M_1T''_1 = a.$$

D'ailleurs, l'angle $M_1S'_1x$, égal à $M_1T'_1O$, est égal à φ_1; par conséquent, $M_1S'_1$ est perpendiculaire à la direction des tangentes correspondant aux cercles principaux, et fait un angle égal à δ_1 avec la normale à l'ellipse en M_1.

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

Or le rapprochement des formules (3') et (6) montre que

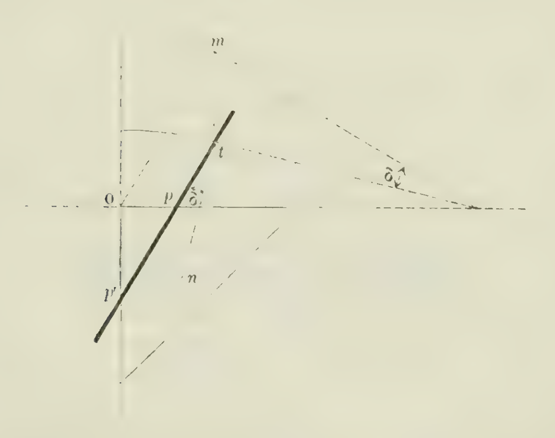
$$\rho_1 = \frac{a+b}{2}\cos\delta_1.$$

Donc *le centre de courbure répondant au point* M_1 *est le pied de la perpendiculaire abaissée du milieu de* $S'_1 S''_1$ *sur la normale correspondante.*

6. Voici une application pratique de la théorie précédente.

On construit un compas elliptique composé d'une réglette munie de deux pointes p et p' avec lesquelles on

Fig. 2.



suit les bords d'une équerre, et d'un tire-ligne t dont les becs s'écartent dans le sens de l'axe de la réglette. Il est évident que ce tire-ligne ne fournira point un trait d'épaisseur uniforme. On peut se proposer d'étudier comment varie l'épaisseur de ce trait. A cet effet, menons par le point O la droite Om parallèle et égale à $p't$; le point m décrit le cercle principal de l'ellipse

que décrit le point t. On voit donc que l'angle du compas $p't$ et de la normale tn à l'ellipse tracée est précisément égal à la déviation δ de cette ellipse au point considéré. Or il est aisé de voir que l'épaisseur ε du trait est, en chaque point, *sensiblement* égale à la projection de l'écartement e des becs du tire-ligne sur la normale correspondante ; par suite,

$$\varepsilon = e \cos \delta,$$

et le minimum de l'épaisseur du trait est donné par

$$\varepsilon_1 = e \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Par exemple, pour $a = 1,5$, $b = 1$ (ellipse surbaissée au $\frac{1}{3}$), on a

$$\varepsilon_1 = e \times 0,979794\ldots.$$

Pour $a = 2$, $b = 1$ (ellipse surbaissée au $\frac{1}{4}$),

$$\varepsilon_1 = e \times 0,942809\ldots.$$

ÉTUDE SUR LES PARIS DE COURSES

[SUITE (1)];

PAR M. M. DU CHATENET.

VI. — *Paris sur le premier et le second.*

Le pari suivant se fait assez souvent, surtout dans les courses importantes. Le preneur parie que tel cheval qu'il désigne arrivera premier et que tel autre sera second.

Il est facile de calculer la probabilité pour que ces

---

(1) *Voir* même Tome, p. 327.

deux événements s'accomplissent. Ce sera le produit des probabilités de chacun d'eux pris isolément. La probabilité du cheval coté a d'arriver premier est

$$\frac{1}{a+1}.$$

Celle du cheval coté b d'arriver second, étant donné que l'autre arrive premier, sera, comme on a vu,

$$\frac{\frac{1}{b+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}}.$$

La probabilité cherchée sera donc, en appelant n la cote du pari,

(15) $$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{a+1}\,\frac{1}{b+1}\,\frac{1}{1+M-\frac{1}{a+1}}.$$

Pour faire un livre complet, il faudrait prendre ou donner toutes les combinaisons possibles que l'on peut imaginer sur l'arrivée des deux premiers chevaux. S'il y a m chevaux prenant part à la course, il y aura $m(m-1)$ cas qui pourront se présenter. On peut vérifier que la somme de toutes ces probabilités donne $1+M$, c'est-à-dire que le chargement ou déchargement correspondant à l'opération reste le même. Il faut en conclure que, le nombre de combinaisons augmentant très rapidement avec le nombre de chevaux et étant toujours très supérieur à ce nombre, l'opération sera moins avantageuse que le pari ordinaire, car il sera pratiquement impossible de faire un livre complet. Ce genre de pari ne saurait donc être destiné à amener un bénéfice assuré; on ne doit y chercher qu'un gain aléatoire en fixant une cote qui paraisse favorable, ou un moyen de réaliser un arbitrage, comme nous le verrons plus loin.

Prenons l'exemple précédent de trois chevaux A, B, C cotés 1, $1\frac{1}{2}$, 4 avec un chargement de 0,10. Les probabilités qui correspondent aux cas AB, AC, BA, BC, CA, CB seront

$$0{,}333, \quad 0{,}167, \quad 0{,}286, \quad 0{,}115, \quad 0{,}110, \quad 0{,}089,$$

et les cotes des paris devront être, à très peu près,

$$2, \quad 5, \quad 2\tfrac{1}{2}, \quad 7\tfrac{1}{2}, \quad 8, \quad 9.$$

Il y a une autre manière de comprendre et d'effectuer le pari sur les deux premiers chevaux d'une course. On peut parier que deux chevaux désignés seront tous les deux dans les deux premiers, mais sans assigner, comme précédemment, la place précise de chacun d'eux. La solution de cette question est la conséquence de ce que nous venons de voir. En effet, les deux chevaux, A et B par exemple, pourront arriver dans l'ordre AB et BA. La probabilité cherchée sera donc la somme des probabilités de ces deux événements

$$(16) \quad \frac{1}{n'+1} = \frac{1}{a+1}\,\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1+M-\dfrac{1}{a+1}} + \frac{1}{1+M-\dfrac{1}{b+1}}\right).$$

Le nombre des cas qui pourront se présenter sera alors

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Dans l'exemple numérique précédent, les probabilités qui correspondent aux cas AB, BC, CA seront

$$0{,}619, \quad 0{,}204, \quad 0{,}277,$$

et les cotes, à peu près,

$$\tfrac{3}{5}, \quad 4, \quad 3\tfrac{1}{2}.$$

VII. — *Paris sur les places relatives.*

Au lieu de parier sur le cheval qui doit arriver premier parmi tous ceux qui sont engagés dans une course, nous pouvons n'en considérer qu'une partie et parier sur celui qui arrivera le premier du groupe en question.

Par exemple, dans une course où doivent figurer les chevaux A, B, C, D, E, F, G, H, ne considérons que les chevaux A, B, C, D; nous parierons que l'un d'eux, A, arrivera avant les autres, B, C, D.

Disons de suite que, dans un tel pari, il sera toujours bon de stipuler qu'il n'aura de valeur que si le cheval désigné est placé dans les deux ou trois premiers. En effet, les chevaux qui, pendant la première partie de la course, s'aperçoivent qu'ils ne peuvent obtenir une place entraînant un prix, abandonnent la lutte et ne cherchent plus à devancer ceux qui les précèdent.

Cette question a déjà été incidemment traitée. La probabilité pour que le cheval A arrive avant B, C, D sera, d'après ce qui a été dit,

$$\frac{\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}}.$$

La somme de toutes les probabilités analogues serait égale à l'unité. Il serait donc impossible de faire un livre; mais on y arrivera en augmentant ou diminuant un peu les valeurs trouvées pour toutes ces cotes.

VIII. — *Paris sur une partie des chevaux.*

Nous avons examiné le pari qui consiste à prendre ou donner un cheval placé. Dans ce cas, on désigne plusieurs places pour un même cheval. Nous pouvons ren-

verser la question et désigner un groupe de chevaux pour une même place. Par exemple, dans une course où doivent courir les chevaux A, B, C, D, E, F, prenons seulement les chevaux A, B, C et parions que l'un d'entre eux, sans fixer lequel, arrivera premier.

Cherchons la probabilité qu'a le groupe de chevaux considéré de fournir le gagnant. Ce sera la somme des probabilités de chaque cheval pris isolément, ou

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.$$

Dans une course où il y a m chevaux engagés, si on les groupe n par n, on pourra faire sur eux

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

paris différents.

Au lieu de parier que l'un des chevaux du groupe arrivera premier, on peut parier qu'il sera second. La probabilité sera alors

$$\frac{1}{a'+1}+\frac{1}{b'+1}+\frac{1}{c'+1}$$

ou, en fonction des cotes de premier,

$$\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\sum\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}}$$

$$-\left[\frac{\frac{1}{(a+1)^2}}{1+M-\frac{1}{a+1}}+\frac{\frac{1}{(b+1)^2}}{1+M-\frac{1}{b+1}}+\frac{\frac{1}{(c+1)^2}}{1+M-\frac{1}{c+1}}\right].$$

Soit une course où cinq chevaux sont engagés avec les cotes 1, 3, 4, 7, 9, correspondant à un chargement de 0,175. Supposons que nous groupions ensemble les chevaux cotés 1, 4, 9. La probabilité, pour que l'un

d'eux arrive premier, sera

$$0,8,$$

et la cote du pari

$$\frac{1}{4}.$$

Si l'on parie que les chevaux déjà cités fourniront le second de la course, la probabilité est

$$0,7,$$

et la cote du pari serait

$$\frac{9}{20}.$$

On peut, enfin, parier qu'un groupe de trois chevaux, par exemple, aura un cheval placé dans les deux premiers. La probabilité sera la somme des probabilités de premier et de second de tous les chevaux, c'est-à-dire

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a'+1}+\frac{1}{b'+1}+\frac{1}{c'+1},$$

c'est-à-dire la somme des probabilités des deux cas précédents.

Dans l'exemple numérique choisi, la probabilité serait

$$1,50,$$

ce qui est absurde; mais ce fait est dû à l'influence du chargement qui ne permet plus d'accepter un pareil pari.

IX. — *Paris sur plusieurs courses.*

Nous avons examiné les principales espèces de paris que l'on peut se proposer sur une course. On peut les augmenter d'une façon presque indéfinie de la manière suivante. Étant données plusieurs courses à venir, si l'on connaît les chevaux qui y prendront part, on peut faire sur chacune d'elles les paris que nous avons étudiés, et lier ensemble tous ces paris, de manière que, pour avoir

gagné définitivement, il faut avoir gagné isolément chacun d'eux.

Par exemple, sur une série de trois courses, on pourra désigner le premier de l'une, le premier et le second de l'autre, et désigner un cheval placé dans la troisième. Il faudra gagner chacun de ces trois paris pour gagner le pari proposé.

Soient $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ le nombre de paris que l'on peut faire sur chacune des n courses formant une série. On pourra, sur l'ensemble, faire $q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$ paris.

L'analyse de tous les cas qui peuvent se présenter comme combinaisons de paris sur plusieurs courses est toujours très simple. La probabilité cherchée sera le produit de toutes les probabilités élémentaires. On en déduira la cote correspondant au pari.

La combinaison la plus fréquente est celle qui consiste à désigner le premier dans une série de courses. Si les chevaux indiqués ont pour cotes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans chaque course prise isolément, la probabilité de l'événement complexe sera

$$\frac{1}{a_1+1}\,\frac{1}{a_2+1}\cdots\frac{1}{a_n+1}.$$

S'il fallait désigner le premier et le second dans chacune des n courses, la probabilité serait

$$\frac{1}{a_1+1}\,\frac{1}{a_2+1}\cdots\frac{1}{a_n+1}\,\frac{1}{b_1+1}\,\frac{1}{b_2+1}\cdots\frac{1}{b_n+1}$$
$$\times\frac{1}{1+M-\frac{1}{a_1+1}}\,\frac{1}{1+M-\frac{1}{a_2+1}}\cdots\frac{1}{1+M-\frac{1}{a_n+1}}.$$

On peut aussi, dans une série de plusieurs courses, ne considérer qu'un seul cheval engagé dans toutes et sur lequel porteront les diverses combinaisons qu'on peut se proposer.

Si un cheval est engagé dans deux courses, la probabilité pour qu'il gagne l'une des deux courses, sans préciser laquelle, sera

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}.$$

S'il est engagé dans trois courses, la probabilité, pour qu'il en gagne une, sera

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\frac{1}{a_3+1}.$$

La probabilité, pour qu'il en gagne deux sur les trois, sans préciser lesquelles, sera

$$\frac{1}{a_1+1}\,\frac{1}{a_2+1}+\frac{1}{a_2+1}\,\frac{1}{a_3+1}+\frac{1}{a_3+1}\,\frac{1}{a_1+1}.$$

X. — *Poule.*

La poule est un mode de pari qui diffère complètement de ceux dont nous avons parlé, en ce qu'il ne repose en rien sur l'appréciation des chevaux et que tout y est livré au hasard.

Soit une course où n chevaux sont engagés; n personnes se réunissent et, après avoir fixé un enjeu commun, tirent au sort les noms des n chevaux. Le parieur à qui est échu le nom du cheval qui arrive premier gagne la poule, c'est-à-dire la somme des n enjeux. Les anciennes agences qui servaient d'intermédiaires entre les diverses personnes participant à une poule prélevaient une commission α par franc, de sorte que, si l'on nommait Q l'enjeu commun, le gagnant ne touchait réellement que

$$n(1-\alpha)Q,$$

et son bénéfice net était

$$(n-1-\alpha n)Q.$$

Avant de tirer les chevaux au sort, tous les parieurs se trouvent exactement dans les mêmes conditions, et les enjeux doivent bien être égaux; mais, quand chacun connaît le cheval qui lui est échu, la situation est changée, et les chances des divers joueurs ne sont plus les mêmes. Voyons dans quel cas on aura été favorisé par la poule. Soit a la cote du cheval que l'on a obtenu. On a donc, pour gagner la probabilité,

$$\frac{1}{a+1}.$$

Avant le tirage, on avait la probabilité

$$\frac{1}{n};$$

il faudra donc, pour retirer un avantage de la poule, la condition

$$n > a+1.$$

On peut convenir, dans une poule, que le parieur qui aura le cheval arrivant second aura droit à une fraction K de la somme des enjeux. Dans ce cas, le premier gagnant touchera donc

$$n(1-K)Q,$$

et le second

$$KnQ.$$

Avant le tirage, la probabilité des joueurs de voir son cheval placé dans les deux premiers est

$$\frac{2}{n};$$

après le tirage, si a et a' représentent les cotes de premier et de second du cheval obtenu, la probabilité sera

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a'+1}.$$

Pour que la poule ait produit un avantage, il faudra donc la condition

$$\frac{2}{n} > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a'+1}$$

ou

$$\frac{2(a-1)}{n} > 1 + \sum \frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}} - \frac{\frac{1}{a-1}}{1+M-\frac{1}{a-1}}.$$

L'usage ne s'est pas introduit de faire des poules contre les chevaux, c'est-à-dire celles où le joueur à qui est échu le cheval qui arrive a seul perdu et où les autres se partagent son enjeu. Dans ce cas, la probabilité de chaque parieur est le complément de celle qu'il aurait dans la poule ordinaire; il faudra donc, pour avoir retiré un avantage du tirage, la condition

$$n < a + 1.$$

La somme à toucher, toujours petite puisque la probabilité de gagner est grande, sera

$$\frac{n}{n-1} Q.$$

XI. — *Paris mutuels.*

Les paris mutuels, aujourd'hui prohibés en France, s'effectuent comme il suit. Une agence reçoit de chaque personne désirant parier sur une course une mise uniforme, soit 1^{fr}, placée sur un cheval déterminé. Après la course, toutes les mises sont réparties entre les parieurs qui ont placé leurs enjeux sur le cheval gagnant. Dans ce mode d'opérer, c'est bien le public qui parie contre lui-même, d'où le nom de *pari mutuel*. L'agence qui organise l'opération n'agit que comme intermédiaire, et, à ce titre, elle prélève une commission α sur tous les

enjeux; par conséquent, la somme P à distribuer entre les personnes qui ont parié pour le gagnant ne sera plus que

$$P(1-\alpha).$$

Soient A, B, C, ... le nombre de mises de 1^{fr} placées sur les divers chevaux d'une même course. Si c'est le cheval portant la somme A qui gagne, chaque parieur gagnant recevra la somme

$$\frac{P}{A}(1-\alpha),$$

ce qui constituera pour lui un bénéfice

$$\frac{P}{A}(1-\alpha)-1.$$

On voit que, en définitive, les paris mutuels ressemblent beaucoup aux paris à la cote; mais, dans ce cas, c'est le public qui détermine lui-même la cote et qui la fait varier à chaque instant, en se portant sur un cheval plutôt que sur un autre. Si nous appelons a la cote résultant des sommes engagées sur le cheval portant les paris A et sur les autres, on aura

$$(17) \qquad a+1=\frac{P}{A}(1-\alpha).$$

Puisque les paris mutuels peuvent être assimilés aux paris à la cote et que l'agence prélève une commission sur les sommes qu'elle reçoit, il est évident que le public ne se trouve pas dans les conditions d'un pari strictement équitable, et que sa position est tout à fait analogue à celle qu'il a quand il parie contre une agence dont la cote présente un chargement. Il est donc intéressant de savoir à quel chargement M correspond la commission α prélevée par l'intermédiaire.

Pour résoudre cette question, il suffira de faire la somme $\sum \frac{1}{a+1}$, en remplaçant $a, b, c, \ldots$ par les cotes qui résultent de l'ensemble des paris d'après (17); on trouvera ainsi

$$\sum \frac{1}{a+1} = 1 + M = \frac{1}{1-\alpha},$$

d'où

$$M = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Une commission de 8 pour 100 équivaut à un chargement de 0,087; une commission de 12 pour 100 à un chargement de 0,136.

De même que pour les poules, l'usage ne s'est guère introduit de faire des paris mutuels contre les chevaux, c'est-à-dire ceux où le joueur a perdu quand le cheval qui arrive est celui contre lequel il avait parié. Les joueurs qui avaient parié contre tous les autres chevaux se répartissent les enjeux perdus. Cette répartition peut se faire de plusieurs manières : par personne ou par cheval.

Dans le premier cas, les mises placées contre le cheval qui est arrivé sont distribuées également entre tous les autres joueurs. Le bénéfice sera donc

$$\frac{A}{P-A},$$

et la somme totale retirée, y compris l'enjeu, sera

$$\frac{P}{P-A}.$$

Dans le second cas, les mises placées contre le cheva qui est arrivé sont distribuées par parties égales entre tous les autres chevaux, et la partie qui correspond à chaque cheval sera distribuée également entre les joueurs

qui ont parié contre lui. Si le cheval contre lequel on a parié A arrive premier, les personnes qui auront toutes réunies parié B contre un autre recevront comme bénéfice

$$\frac{A}{(n-1)B},$$

n étant le nombre des chevaux.

Ce second système est assurément le plus rationnel et le plus équitable. En effet, dans le premier, tous les parieurs reçoivent le même bénéfice; par conséquent, tous les paris devront se porter contre les chevaux notoirement connus comme incapables d'arriver. Il y a tout lieu de croire que les chevaux à faible cote ne porteront aucun pari et que, s'ils arrivent, l'opération devra être annulée. Le second mode a l'avantage de rémunérer plus justement les paris faits contre des chevaux réputés gagnants probables, car la masse du public ne se portera pas contre eux; il encourage donc les parieurs, par l'espoir d'un gain plus grand, à étudier avec plus de soin les probabilités de chacun des chevaux.

XII. — *Arbitrages simples.*

Nous avons vu comment le preneur et le donneur de chevaux pouvaient, avec un livre bien fait, s'assurer un bénéfice certain, quel que soit le résultat de la course. On peut encore, au moyen d'arbitrages faits dans des conditions déterminées, obtenir un bénéfice certain, tout en ne pariant que sur un petit nombre de chevaux et même sur un seul. Il y aura un arbitrage toutes les fois qu'après avoir fait un ou plusieurs paris on pourra les défaire au moyen d'un ou plusieurs autres paris, tout en se laissant un bénéfice assuré. Cette manière d'opérer consiste, pour ainsi dire, à acheter une valeur pour la

vendre ou à la vendre pour la racheter dans des conditions plus avantageuses. En fait, il est bien plus facile de prendre des chevaux que de les donner; on devra donc, pour rendre un arbitrage probable, trouver d'abord un preneur; on pourra presque toujours trouver un donneur.

Le cas le plus simple des arbitrages de courses consiste à faire un pari et à le détruire par le pari contraire.

Soit q la somme qu'on acceptera de la contre-partie en donnant un pari. Si l'on perd le pari, la perte sera

$$q\psi,$$

ψ étant une fonction des cotes des chevaux qui dépendra de la nature du pari en question. Soit p la somme qu'on expose en prenant un pari; si on le gagne, le bénéfice sera

$$p\varphi,$$

φ étant une autre fonction des cotes.

Si les deux paris peuvent former un arbitrage, voyons quels doivent être les enjeux p et q pour obtenir des bénéfices déterminés A et B suivant le pari qu'on gagnera.

Si l'on gagne le premier pari, on aura gagné q; mais, dans ce cas, on perdra le second, et de ce chef on perdra p. Pour obtenir, quand même, un bénéfice A, il faudra avoir la relation

$$q - p = \mathrm{A}.$$

Si l'on perd le premier pari, on perdra $q\psi$; mais alors on gagnera le second, et de ce chef on gagnera $p\varphi$. Pour réaliser ainsi un bénéfice B, on devra avoir la relation

$$p\varphi - q\psi = \mathrm{B}.$$

Ces deux équations nous permettent de trouver la valeur des enjeux. Nous aurons, en effet,

$$(18) \qquad p = \frac{\mathrm{A}\psi + \mathrm{B}}{\varphi - \psi}, \qquad q = \frac{\mathrm{A}\varphi + \mathrm{B}}{\varphi - \psi}.$$

On voit immédiatement que, pour que ces valeurs soient positives, c'est-à-dire pour qu'elles fournissent une solution au problème, il faut qu'on ait $\varphi > \psi$.

Comme cas particulier des formules (18), si l'on veut, en tout cas, obtenir le même bénéfice, il suffira de faire

$$A = B,$$

et les valeurs des enjeux seront

$$(19) \qquad p = \frac{A(\psi + 1)}{\varphi - \psi}, \qquad q = \frac{A(\varphi + 1)}{\varphi - \psi}.$$

Si l'on veut se couvrir sur l'un des paris en cherchant un bénéfice sur l'autre, les formules seront

$$(20) \qquad p = \frac{A\psi}{\varphi - \psi}, \qquad q = \frac{A\varphi}{\varphi - \psi},$$

$$(21) \qquad p = \frac{B}{\varphi - \psi}, \qquad q = \frac{B}{\varphi - \psi}.$$

On doit commencer, avons-nous dit, par donner un pari; il suffira donc de connaître le rapport $\frac{p}{q}$ pour en déduire la valeur de p. On aura donc, d'après (19),

$$(22) \qquad \frac{p}{q} = \frac{A\psi + B}{A\varphi + B}.$$

Si l'on avait $\varphi < \psi$, l'arbitrage serait impossible, tel que nous l'avons indiqué; mais on pourrait en faire un autre en donnant le pari qu'on a pris et en prenant le pari qu'on a donné. Les équations du problème deviendraient

$$p - q = A \qquad \text{et} \qquad q\psi - p\varphi = B.$$

Elles ne diffèrent des précédentes que par le changement de signe de p et q. La solution serait donc

$$(23) \qquad p = \frac{A\psi + B}{\psi - \varphi}, \qquad q = \frac{A\varphi + B}{\psi - \varphi}.$$

Appliquons cette théorie à un exemple particulier. Supposons qu'on donne un cheval à la cote a et qu'on le prenne à la cote b. La solution sera fournie par les formules (18), en faisant $\psi = a$, $\varphi = b$; on aura

$$(24)\qquad p = \frac{Aa + B}{b - a}, \qquad q = \frac{Ab + B}{b - a}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{Aa + B}{Ab + B}$$

ou, si l'on veut un bénéfice uniforme A,

$$(25)\qquad p = \frac{A(a + 1)}{b - a}, \qquad q = \frac{A(b + 1)}{b - a}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{a + 1}{b + 1}.$$

Pour que l'arbitrage soit possible, il faudra donc pouvoir donner le cheval à une cote plus faible que celle à laquelle on l'a pris.

Si l'on veut simplement se couvrir sur le pari coté b et gagner A sur le pari coté a, on aura

$$(26)\qquad p = \frac{Aa}{b - a}, \qquad q = \frac{Ab}{b - a}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{a}{b}$$

Si l'on veut faire l'opération inverse, on aura

$$(27)\qquad p = \frac{B}{b - a}, \qquad q = \frac{B}{b - a}.$$

Faisons une application numérique de ce qui précède. On a donné un cheval à la cote 2 pour une somme de 900^{fr}, et l'on trouve plus tard à prendre ce même cheval à la cote $2\frac{1}{2}$. Si l'on veut gagner 100^{fr} s'il n'arrive pas et 200^{fr} s'il arrive, on pariera 800^{fr} pour lui.

Si l'on veut gagner la même somme dans les deux cas, on pariera 771^{fr} pour le cheval, et le bénéfice sera 128^{fr}.

Inutile d'ajouter que tout ce qui a été dit serait également vrai si, au lieu de parier sur des chevaux devant arriver premiers, on faisait des paris sur des chevaux seconds ou placés, etc. (*A suivre.*)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1885).

Mathématiques.

1. Soit une ellipse E dont le grand axe et la distance focale sont respectivement égaux à $2a$ et $2c$. Du foyer F de cette ellipse comme centre, on décrit une circonférence C dont le rayon est égal à $\sqrt{2(a^2+c^2)}$. D'un point quelconque P_1 de la circonférence C, on mène une tangente P_1P_2 à l'ellipse, P_2 désignant le second point de rencontre de cette droite avec la circonférence. On mène de même la tangente P_2P_3 à l'ellipse, puis la tangente P_3P_4. On demande de démontrer que la seconde tangente menée à l'ellipse par le point P_4 passe par le point initial P_1.

2. On considère la fonction de x

$$y = \frac{\sin[m(\arccos x)]}{\sqrt{1-x^2}},$$

où m est une constante donnée. 1° Montrer que cette fonction satisfait à la relation

$$(x^2-1)y'' + 3xy' - (m^2-1)y = 0,$$

y' et y'' désignant les dérivées première et seconde de la fonction y.

2° En supposant que m soit un entier positif, on demande d'établir que l'on peut satisfaire à l'identité précédente en prenant pour y un polynôme en x. Après avoir trouvé le degré de ce polynôme, on cherchera la forme de ses coefficients.

Physique.

1. Lunette astronomique.

2. Une boule, dont le volume est V et le poids dans le vide P, est suspendue à un dynamomètre sensible; ce dynamomètre est accroché à un aérostat qui, partant du niveau de la mer à la pression $0^m,760$, s'élève dans un air sec à $0°$.

Comment variera, pendant l'ascension, l'effort causé par la boule sur le dynamomètre? On admettra que la hauteur est liée à la pression barométrique par la formule

$$z = 18336^m \log \frac{H}{h}.$$

Appliquer à l'exemple numérique suivant :

$$V = 10^l, \qquad P = 4^{kg},500.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. H. Brocard.

Dans un article publié au Tome V, p. 233-237, M. du Châtenet a cherché les courbes pour lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant

$$r \quad (n-1)\cos\theta,$$

et il a trouvé que les seules courbes jouissant de cette propriété ont pour équation générale

$$r^n = a^n \cos n\omega.$$

A ce propos, je suis surpris de voir combien les notions relatives à cette famille de courbes semblent rencontrer

de difficulté à se vulgariser parmi les géomètres. Il me paraît donc intéressant de rappeler ici la bibliographie de ces lignes remarquables.

Le théorème de M. du Châtenet et l'observation au sujet de la spirale logarithmique (p. 235) ont déjà été signalés, au moins en principe, par M. Nicolaïdès, à l'occasion des résultats presque identiques obtenus par M. Allégret (t. IX, p. 30-32, 1870, et t. XI, p. 162-167, 1872), mais la proposition est plus ancienne (J.-A. Serret, *Journal de Mathématiques de Liouville*, t. VII, p. 118, et Maclaurin, *Traité des fluxions*), comme le fait remarquer M. Haton de la Goupillière, dans la bibliographie qu'il a consacrée à ces courbes pour lesquelles il a autrefois proposé la désignation de *spirales sinusoïdes* (*Nouvelles Annales*, t. XV, p. 97-108, 1876).

Voir aussi, dans le même Journal, question 493, 2e série, t. I, p. 321-322, 1862 (Sacchi); question 166 (W. Roberts), t. VII, p. 98, 1848, et 2e série, t. XI, p. 283, 1872; puis 2e série, t. V, p. 27-31, 1866 (Barbier et E. Lucas), et 3e série, t. II, p. 118-129, 1883 (Laquière).

Enfin, l'article précité de M. Haton vient de servir de point de départ à une monographie publiée dans le *Journal de Battaglini*, t. XXIV, p. 23-43, 1886, *Sulle curve* $r^m \cos m\theta = a^m$. L'auteur, M. A. Bassani, signale les plus récents travaux relatifs aux spirales sinusoïdes.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Leçons de Géométrie analytique, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales; par M. *E. Pruvost,* inspecteur général de l'Instruction publique,

ancien professeur au lycée Louis-le-Grand. Tome II, *Géométrie dans l'espace*. Paris, Dupont; 1886. Grand in-8 de 438 pages. Prix : 7fr, 50.

Histoire des Sciences mathématiques et physiques; par M. *Maximilien Marie*, répétiteur de Mécanique et examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Tome IX, *De Lagrange à Laplace*. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Petit in-8. Prix : 6fr.

Exposé des méthodes générales en Mathématiques, résolution et intégration des équations, applications diverses, d'après Hoené Wronski; par M. *Émile West*. Paris, Gauthier-Villars; 1886. In-4 de 312 pages. Prix : 12fr.

Cours d'Algèbre supérieure; par *J.-A. Serret*. 5e édition. Paris, Gauthier-Villars; 1885. 2 vol. in-8 de 660 pages et de 706 pages. Prix : 25fr.

Cours de Calcul différentiel et intégral; par *J.-A. Serret*. 3e édition. Paris, Gauthier-Villars; 1886. 2 vol. in-8 de 630 pages et de 746 pages. Prix : 24fr.

Traité élémentaire des mesures absolues, mécaniques, électrostatiques et électromagnétiques, avec applications à de nombreux problèmes; par *Alessandro Serpieri*. Traduit de l'italien et annoté par M. *Paul Marcillac*. Paris, Gauthier-Villars; 1886. In-8 de 125 pages. Prix : 3fr,50.

Essai sur la Synthèse des forces physiques; par le P. *Ad. Leray*, prêtre eudiste. Constitution de la matière, mécanique des atomes, élasticité de l'éther. Paris, Gauthier-Villars; 1885. In-8 de 190 pages. Prix : 5fr.

La Divisibilité des fonctions entières démontrée sans les imaginaires, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales et des cours pour la licence ès sciences mathématiques; par M. *Ch. Jourjon*, ingénieur des

Ponts et Chaussées. Paris, Gauthier-Villars; 1886. In-8 de 53 pages. Prix : 2fr.

Sur les Progrès de la science électrique et les nouvelles machines d'induction; par M. *J. Boulanger*, capitaine du génie. Paris, Gauthier-Villars; 1885. In-8 de 178 pages. Prix : 3fr, 50.

La Statique graphique et ses applications aux constructions; par M. *Maurice Lévy*, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. 2e édition. 1re Partie, *Principes et applications de Statique graphique pure*. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Grand in-8 de 577 pages, avec atlas de 26 planches. Prix : 22fr.

Leçons d'Algèbre supérieure; par *G. Salmon*, professeur au collège de la Trinité, à Dublin. 2e édition française, publiée, d'après la 4e édition anglaise, par M. *O. Chemin*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, Gauthier-Villars; 1886. In-8. Prix : 9fr.

Traité d'Électricité et de Magnétisme; par *J. Clerk Maxwell*, professeur de Physique expérimentale à l'Université de Cambridge. Traduit de l'anglais sur la 2e édition, par M. *G. Seligmann-Lui*, ingénieur des télégraphes, avec notes et éclaircissements par MM. *Cornu*, *Potier* et *Sarrau*, professeurs à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars; 1885. 2 forts vol. grand in-8, avec figures et 20 planches dans le texte. Prix : 25fr.

Esquisse historique sur la marche du développement de la nouvelle Géométrie; par *Hermann Hankel*. Traduction de M. *Ed. Dewulf*, colonel du génie. Paris, Gauthier-Villars; 1885. Grand in-8 de 36 pages. Prix : 1fr, 25.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1886;

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne un rectangle ABA'B'. *Deux hyperboles équilatères* (A) *et* (B), *ayant toutes deux leurs asymptotes parallèles aux côtés du rectangle, passent, l'une* (A) *par les sommets opposés* A *et* A', *l'autre* (B) *par les sommets opposés* B *et* B' *du rectangle :*

1° *Démontrer que le centre de l'hyperbole* (A) *a, par rapport à l'hyperbole* (B), *la même polaire* P *que le centre de l'hyperbole* (B) *par rapport à l'hyperbole* (A);

2° *Le rectangle restant fixe, on fait varier en même temps les deux hyperboles de manière qu'elles soient égales entre elles, sans être symétriques par rapport à l'un des axes de symétrie du rectangle. Examiner si elles se coupent en des points réels; trouver le lieu du milieu de la droite qui joint leurs centres, et prouver que la droite* P *est constamment tangente à ce lieu.*

3° *Si l'on prend une quelconque des hyperboles* (A) *et une quelconque des hyperboles* (B), *il existe une infinité de rectangles ayant, comme le rectangle donné, deux sommets opposés sur chacune de ces hyperboles, et les côtés parallèles aux asymptotes. Trouver le lieu des centres de ces rectangles.*

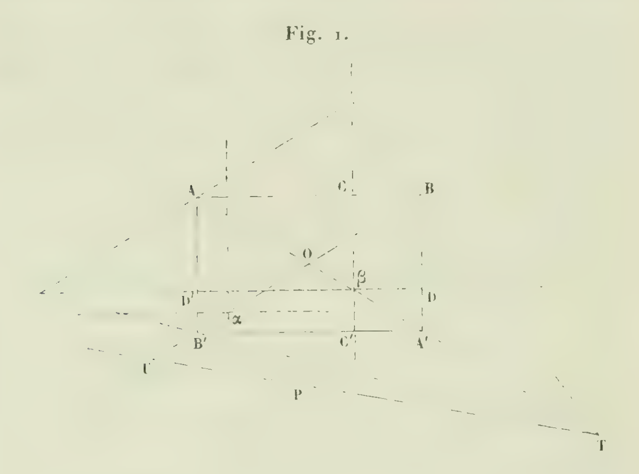
Prenons (*fig.* 1) la parallèle CC' à BA' pour l'asymptote d'une hyperbole (B) et cherchons l'autre asym-

ptote de cette courbe. Soit DD′ cette droite. Puisque B et B′ appartiennent à la même hyperbole, on a

$$BC \times BD = B'C' \times B'D'.$$

Il résulte de là que les deux asymptotes se coupent sur AA′. On voit ainsi que : *le centre* β *d'une hyperbole* (B) *est sur la diagonale* AA′; de même : *le centre* α *d'une hyperbole* (A) *est sur la diagonale* BB′.

Fig. 1.



Les tangentes en B et B′ à (B) rencontrent les asymptotes de cette courbe en des points qui sont les symétriques de β par rapport aux côtés du rectangle donné. Joignons ces points par des droites ; nous obtenons un trapèze dont les côtés parallèles passent par A et A′ et sont parallèles à BB′. Les côtés non parallèles de ce trapèze se coupent en T sur AA′, qui n'est autre que la droite qui joint les milieux des côtés parallèles du trapèze. *Le point* T *est l'harmonique conjugué de* β *par rapport à* A *et* A′.

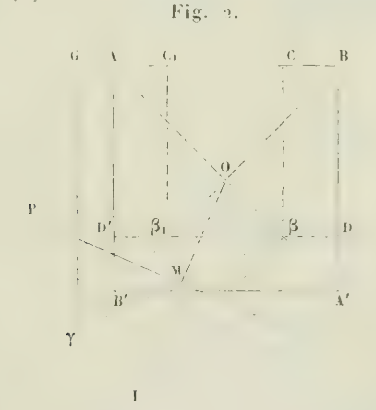
Soit une hyperbole (A) dont le centre est α sur BB′. Cherchons la polaire de ce centre par rapport à (B).

D'abord *cette polaire passe par le point* U, *harmonique conjugué de* α *par rapport aux extrémités de la corde* AA' *de l'hyperbole* (B); ensuite, elle passe par le point de rencontre T des tangentes menées à cette courbe aux extrémités de cette corde. *Cette polaire est donc la droite* UT, *qui passe par les points* U *et* T *harmoniques conjugués de* α *et* β *par rapport aux extrémités des diagonales* BB', AA' *qui contiennent respectivement ces points.*

Il résulte évidemment de là que la polaire P de α par rapport à (B) *est aussi la polaire de* β *par rapport à* (A).

La première partie de la question proposée est ainsi démontrée ([1]).

Fig. 2.



Projetons le rectangle donné suivant un carré (*fig.* 2) et conservons les notations précédentes.

([1]) La première et la dernière partie de la question se résolvent immédiatement, en remarquant que les deux hyperboles sont les projections coniques de deux cercles orthogonaux, et le rectangle AA'BB' la projection de deux diamètres rectangulaires AA', BB' de ces deux cercles. Ch. B.

Appelons γ le centre de l'hyperbole (A), qui est égale à l'hyperbole (B) dont le centre est β. Soient β_1 le point où βD coupe BB' et G le point de rencontre de AB et de l'asymptote de (A) parallèle à AB'.

Puisque les hyperboles, dont les centres sont β et γ, sont égales, on a

$$BC \times BD = \gamma G \times GA$$

ou, en menant $\beta_1 C_1$ parallèlement à BA',

$$\gamma G \times GA = AC_1 \times \beta_1 C_1.$$

De là, comme on le voit facilement,

$$\gamma B \times \gamma B' = \beta_1 B' \times \beta_1 B = \beta A' \times \beta A.$$

Circonscrivons une circonférence au carré ABA'B'. Appelons O le centre de cette courbe et R son rayon, on a

$$\gamma B \times \gamma B' = \overline{\gamma O}^2 - R^2,$$

$$\beta A' \times \beta A = R^2 - \overline{O\beta}^2,$$

par suite

$$\overline{O\gamma}^2 + \overline{O\beta}^2 = 2R^2.$$

Si M est le milieu de $\beta\gamma$, on a aussi

$$\overline{O\gamma}^2 + \overline{O\beta}^2 = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{\gamma M}^2,$$

donc

$$\overline{OM}^2 + \overline{\gamma M}^2 = R^2.$$

Mais le triangle $\beta O \gamma$ étant rectangle en O, γM est égal à OM; il vient alors

$$2\overline{OM}^2 = R^2.$$

Le segment OM est donc égal à la moitié du côté du carré. De là résulte que :

Si l'on fait varier en même temps les hyperboles égales (A) *et* (B), *sans qu'elles soient symétriques par rapport à l'un des axes de symétrie du carré, le lieu*

du milieu du segment compris entre leurs centres est la circonférence inscrite au carré donné.

Il suffit de faire une projection de la figure sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré pour trouver, en réponse au commencement de la deuxième partie de l'énoncé proposé, que *le lieu demandé dans cette deuxième partie est l'ellipse inscrite dans le rectangle donné et qui a pour axes les axes de ce rectangle.* Nous désignerons par (E) cette courbe.

Reprenons (*fig.* 2) le carré $ABA'B'$. Puisque OM est de longueur constante, il en est de même de $\beta_1\gamma_1$. Ainsi :

La distance des centres de deux hyperboles égales, non symétriques par rapport à l'un des axes du carré, est constante et égale au côté du carré.

Cette propriété conduit à celle-ci :

La distance des centres de deux hyperboles égales, non symétriques par rapport à l'un des axes du rectangle donné, est égale au diamètre de (E) *qui lui est parallèle.*

Construisons (*fig.* 2) le rectangle $O\beta_1 I\gamma_1$. Deux autres hyperboles égales conduisent à un rectangle analogue à celui-ci. Comme les diagonales de ces rectangles sont égales au côté du carré, *les points tels que* I *appartiennent à une circonférence décrite du point* O *comme centre avec le côté du carré pour rayon.*

Nous avons trouvé précédemment

$$2\overline{OM}^2 = R^2;$$

il résulte de là que : *la polaire réciproque de cette circonférence par rapport à la circonférence circonscrite au carré donné est la circonférence inscrite à ce carré.*

La polaire de I, par rapport à la circonférence circonscrite au carré, est alors une tangente à la circonférence inscrite. Mais cette polaire joint le pôle de $I\beta$ à celui de $I\gamma$: c'est alors la droite P qui joint les harmoniques conjugués de β et γ par rapport aux extrémités des diagonales AA', BB' qui contiennent respectivement ces centres. Ainsi :

La droite P *est tangente à la circonférence inscrite au carré donné.*

Au moyen d'une projection sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré, on a la réponse à une partie du deuxième alinéa de l'énoncé de la question proposée.

Les hyperboles égales, dont les centres sont β et γ, ont leurs asymptotes parallèles et peuvent être amenées en coïncidence au moyen de la translation de l'une parallèlement à la droite $\beta\gamma$. Ces hyperboles interceptent alors sur cette droite des diamètres égaux et par suite la polaire P passe par le point M milieu du segment $\beta\gamma$. Ainsi :

Dans le cas de deux hyperboles égales, la polaire P *est tangente en* M *à la circonférence inscrite au carré donné* (¹).

Appelons d le demi-diamètre intercepté par l'une des hyperboles sur la droite $\beta\gamma$. On a

$$\beta\gamma \times \beta M = d^2$$

ou

$$2\overline{\beta M}^2 = d^2.$$

(¹) En faisant une projection de la figure sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré, on trouve que cette propriété est vraie dans le cas où l'on a un rectangle dans l'énoncé de la question.

Il est facile de voir directement que la droite qui joint le point M au point conjugué harmonique de γ, par rapport à BB', est perpendiculaire à OM.

Donc, d'après ce qui précède :

Le diamètre intercepté par l'une des hyperboles sur la droite $\beta\gamma$ *est égal à la diagonale du carré donné.*

Le demi-diamètre d est alors plus grand que βM et *la droite* P *ne rencontre pas les hyperboles dont les centres sont* β *et* γ.

Puisque la droite P passe par le milieu M de $\beta\gamma$, les hyperboles la rencontrent aux mêmes points imaginaires; *la droite* P *est alors une corde commune aux hyperboles dont les centres sont* β *et* γ *et les points de rencontre de ces hyperboles sur cette droite sont imaginaires.*

En faisant une projection de la figure sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré, on est conduit à la réponse relative à la dernière partie du deuxième alinéa qui restait à trouver.

Supposons que, par le point fixe β, on mène des cordes de l'hyperbole fixe (A) dont le centre est α (*fig.* 1). Sur chacune de ces cordes on construit un rectangle dont les côtés sont parallèles aux asymptotes de cette courbe. Les diagonales de ces rectangles sont les cordes que nous venons de mener et, d'après ce que nous avons démontré au commencement de cette solution, des droites qui passent par le centre α. Les centres de ces rectangles appartiennent à une courbe (O) lieu des milieux des cordes interceptées par (A) sur les droites qui passent par le point fixe β; *cette courbe* (O) *est alors une hyperbole équilatère dont le centre est au milieu de* $\alpha\beta$ *et dont les asymptotes sont parallèles aux asymptotes de* (A).

Le lieu des sommets B, B′ de ces rectangles est une conique : car sur une droite telle que BB′, qui passe toujours par α, il n'y a que les deux points B, B′ qui appar-

tiennent à ce lieu, le point α n'en faisant pas partie. Par rapport à cette conique l'hyperbole (O) est le lieu des milieux des cordes, telles que B, B', qui passent par α : donc *la conique lieu des points* BB' *est une hyperbole équilatère* (B) *dont le centre est* β *et dont les asymptotes sont parallèles aux côtés des rectangles.*

On voit donc qu'*il existe une infinité de rectangles ayant, comme le rectangle donné, deux sommets opposés sur chacune des hyperboles* (A) *et* (B) *et les côtés parallèles aux asymptotes de ces courbes et que les centres de ces rectangles sont sur une hyperbole équilatère dont le centre est au milieu de la droite des centres de* (A) *et* (B) *et dont les asymptotes sont parallèles aux asymptotes de ces hyperboles.*

Nous avons ainsi achevé de répondre à toutes les parties de la question proposée.

Il y a encore quelques remarques à faire, mais chacun les trouvera facilement.

ÉTUDE SUR LES PARIS DE COURSES
[FIN (1)];

PAR M. M. DU CHATENET.

XIII. — *Arbitrages complexes.*

Les arbitrages à double opération que nous venons de voir sont les plus simples qu'on puisse imaginer. Ils présentent, dans la pratique, ce grave inconvénient qu'on ne pourra jamais faire les deux négociations en même

(1) Voir même Tome, p. 327 et 380.

temps et que, l'une étant faite, il faudra que les conditions du marché se modifient dans un sens convenable pour que l'autre puisse se faire d'une façon avantageuse.

Nous examinerons quelques exemples d'arbitrages fondés sur une triple négociation, et que l'on peut réaliser quand les conditions du marché s'y prètent, ce qui arrive le plus souvent, sans qu'elles doivent se modifier après la conclusion d'un ou deux des paris.

Premier exemple. — Supposons qu'on puisse donner un cheval comme premier à la cote a et comme second à la cote b, et qu'on puisse le prendre à la cote c comme placé dans les deux premiers. Étudions comment cet arbitrage devra se faire pour être fructueux et dans quels cas il sera possible.

Soient p la somme qu'on accepte en donnant le cheval comme premier, q celle qu'on accepte en le donnant comme second et r celle qu'on parie pour le cheval placé. Soient A le bénéfice qu'on veut faire si le cheval arrive premier, B s'il arrive second, C s'il n'arrive ni premier ni second.

Si le cheval est premier, on gagnera q sur le pari fait en le donnant second et cr en le prenant placé; on perdra ap en le donnant premier. On aura donc la relation

$$-ap+q+cr=\text{A}.$$

Si le cheval est second, on gagnera p en le donnant premier et cr en le prenant placé; on perdra bq en le donnant second; d'où la relation

$$p-bq+cr=\text{B}.$$

Si le cheval n'est ni premier ni second, on gagnera p en le donnant premier et q en le donnant second; on

perdra r en le prenant placé. On a donc

$$p + q - r = C.$$

Si, dans ce système de trois équations, nous prenons pour inconnues les enjeux p, q, r, la solution sera

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
p &= \left[\frac{\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1} + C\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}} - A\right]\frac{1}{a+1},\\
q &= \left[\frac{\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1} + C\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}} - B\right]\frac{1}{b+1},\\
r &= \frac{\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1} + C\left(1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{1}{c+1}.
\end{aligned}\right.$$

D'après ces formules, la condition nécessaire et suffisante pour que p et q soient positifs est

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} > \frac{1}{c+1};$$

car, d'après la nature du problème, c sera plus petit que a et b. Cette condition étant satisfaite, on pourra toujours disposer de A, B, C de manière que r soit positif. Du reste, en fait, comme on aura presque toujours

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} < 1,$$

il n'y aura aucune condition nouvelle à ajouter à la précédente.

Si le bénéfice qu'on veut faire est le même dans le cas où le cheval considéré arrive premier ou second, les for-

mules deviennent

$$(29)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\dfrac{A-C}{c+1}+C}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\;\dfrac{1}{a+1}, \\[2ex] q = \dfrac{\dfrac{A-C}{c+1}+C}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\;\dfrac{1}{b+1}, \\[2ex] r = \dfrac{A\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right)+C\left(1-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\;\dfrac{1}{c+1}. \end{cases}$$

Dans le cas où l'on veut obtenir un bénéfice uniforme, quel que soit le résultat de la course, on a

$$(30)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\;\dfrac{P}{a+1}, \\[2ex] q = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\;\dfrac{P}{b+1}, \\[2ex] r = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\;\dfrac{P}{c+1}. \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de l'arbitrage est

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}>\frac{1}{c+1}.$$

Prenons un exemple numérique pour montrer l'importance des paris qu'on peut obtenir par ce moyen. Soient un cheval coté 3 comme premier, 1,5 comme second, et 1 placé dans les deux premiers. Supposons qu'on veuille gagner 200^{fr} si le cheval arrive premier ou second, et 100^{fr} s'il n'est pas placé. On le donnera comme

premier pour 250^{fr} et comme second pour 400^{fr}, et on le prendra placé pour 550^{fr}.

Si, avec les mêmes cotes, on veut obtenir un bénéfice de 150^{fr} en toute hypothèse, on le donnera comme premier pour 250^{fr} et comme second pour 400^{fr}, et on le prendra placé pour 500^{fr}.

On peut aussi ne chercher un bénéfice dans l'arbitrage que dans une ou deux des trois hypothèses qu'on peut faire sur le résultat de la course, tout en se couvrant contre les hypothèses les moins favorables, c'est-à-dire chercher à obtenir, dans certains cas, un gain aléatoire, en se mettant à l'abri contre toute possibilité de perte.

Supposons que, dans le cas actuel, on veuille obtenir un bénéfice P si le cheval considéré est placé dans les deux premiers, tout en se couvrant contre les autres éventualités. Les formules (28) donneront, en faisant $A = B = 0$,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{1 - \dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{a+1},\\ q &= \frac{1 - \dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{b+1},\\ r &= \frac{1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{c+1}. \end{aligned}\right.$$

Pour que les valeurs de p et q soient positives, la seule condition est que le dénominateur soit positif. Il faudra alors, pour qu'il y ait une solution au problème, que le numérateur de r le soit aussi. La condition nécessaire et suffisante de possibilité pour ce mode d'arbitrage sera

donc exprimée par la double inégalité

$$\frac{1}{c+1} < \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} < 1.$$

On peut chercher à faire un arbitrage sur le même sujet que nous avons pris comme exemple, mais en procédant d'une manière contraire à celle qui a été exposée. On prend un cheval premier et second aux cotes a et b et on le donne placé à la cote c. Si nous conservons les mêmes notations que précédemment, nous verrons que les trois cas à considérer conduisent aux trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} ap - q - cr &= \text{A},\\ -p + bq - cr &= \text{B},\\ -p - q + r &= \text{C}. \end{aligned}\right.$$

En comparant ce système d'équations au système obtenu déjà, on remarquera qu'on peut passer du premier au second en changeant les signes de p, q, r. Cette simple observation permettra donc d'écrire les valeurs des inconnues

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \left[\frac{\dfrac{\text{A}}{a+1} + \dfrac{\text{B}}{b+1} + \text{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + \text{A}\right]\frac{1}{a+1},\\ q &= \left[\frac{\dfrac{\text{A}}{a+1} + \dfrac{\text{B}}{b+1} + \text{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + \text{B}\right]\frac{1}{b+1},\\ r &= \frac{\dfrac{\text{A}}{a+1} + \dfrac{\text{B}}{b+1} + \text{C}\left(1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}\cdot\frac{1}{c+1}. \end{aligned}\right.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces va-

leurs soient positives est

$$(33) \qquad \frac{1}{c+1} > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}.$$

Ces deux modes de tenter un arbitrage montrent qu'il y aura toujours possibilité de le faire, pourvu qu'on n'ait pas $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{c+1}$; car, s'il n'est pas possible d'une manière, on l'obtiendra au moyen des négociations contraires.

On pourrait encore vouloir donner un cheval premier et le prendre second et placé. Les trois équations qui résultent de l'analyse de la question sont

$$\begin{aligned} -ap - q + cr &= A, \\ p - bq + cr &= B, \\ p - q - r &= C. \end{aligned}$$

Ce système se déduit du premier en changeant le signe de q; p et q seront donc forcément de signes contraires; par conséquent, cette hypothèse doit être écartée.

Un quatrième mode d'arbitrage sur le même sujet consisterait à prendre un cheval premier et à le donner second et placé. Les équations qui résultent de cette manière d'opérer sont

$$\begin{aligned} ap + q - cr &= A, \\ -p - bq - cr &= B, \\ -p + q - r &= C. \end{aligned}$$

La seconde équation ne pourra être satisfaite par des valeurs positives des inconnues; ce mode d'arbitrage est donc impossible.

On peut encore donner un cheval second et le prendre premier et placé. Ce cas donne lieu à des observations analogues à celles faites à propos du troisième mode.

On peut enfin prendre un cheval second et le donner

premier et placé. Il y a impossibilité comme pour le quatrième mode.

Deuxième exemple. — L'étude de l'arbitrage que nous venons d'examiner fournit la solution de la question suivante : Faire un arbitrage en pariant que, sur deux chevaux désignés, l'un d'eux, qu'on ne désigne pas, arrivera ou n'arrivera pas premier.

Un mode consisterait à prendre le groupe des deux chevaux et à donner chacun d'eux premier.

Si l'on appelle a et b les cotes des deux chevaux pris séparément et c celle du groupe qu'ils forment à eux deux, il n'y aura rien à changer aux formules déjà obtenues.

Troisième exemple. — Quand il s'agit de désigner le vainqueur dans deux courses différentes, on peut tenter de faire un arbitrage sur cette combinaison.

On donne les chevaux séparément dans chaque course et on les prend tous les deux ensemble comme premier dans les deux courses.

Soient a et b les cotes des deux chevaux pris isolément et c celle de la combinaison des deux premiers. Soient A le bénéfice qu'on fait si le cheval coté a arrive, B si c'est le cheval coté b, C si les chevaux arrivent tous deux, et D si aucun des deux n'arrive.

Les quatre hypothèses qu'on peut faire sur le résultat de la course fournissent les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} -ap - q - r &= \text{A}. \\ p - bq - r &= \text{B}. \\ ap - bq + cr &= \text{C}. \\ p + q - r &= \text{D}. \end{aligned}$$

Nous pourrons, dans ces équations, considérer p, q,

r et D comme inconnues. De là nous tirerons

$$(35)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\left[A\left(1-\dfrac{1}{b+1}\right)+B\left(\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}\right)+C\,\dfrac{1}{c+1}\right]\dfrac{1}{a+1}, \\ q = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\left[A\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{c+1}\right)+B\left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)+C\,\dfrac{1}{c+1}\right]\dfrac{1}{b+1}, \\ r = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\left[A\left(1-\dfrac{1}{b+1}\right)+B\left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)+C\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-1\right)\right]\dfrac{1}{c+1}, \\ D = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\left[A\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{c+1}\right)+B\left(\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}\right)+C\,\dfrac{1}{c+1}\right]. \end{cases}$$

Les numérateurs de p, q, r, D sont formés de termes tous positifs ; car il est évident, d'après la nature de la question, que c sera toujours plus grand que a et que b. La seule condition de possibilité du problème, condition à la fois nécessaire et suffisante, sera donc

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} > 1+\frac{1}{c+1}.$$

Si l'on veut obtenir un bénéfice uniforme dans les trois premiers cas, les formules don-

neront

$$
(36)\quad\begin{cases}
p = \dfrac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\,\dfrac{1}{a+1},\\[2ex]
q = \dfrac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\,\dfrac{1}{b+1},\\[2ex]
r = \dfrac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\,\dfrac{1}{c+1},\\[2ex]
D = \dfrac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}\right).
\end{cases}
$$

La condition de possibilité montre que les cotes a et b ne pourront varier que dans des limites très étroites; elles devront toujours être très faibles, en général une fraction de l'unité. Par exemple, si $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, il en résultera que c devra être supérieur à 5. Une telle disproportion entre ces cotes ne se trouvera jamais sur le marché, et l'on peut dire que les formules (35) ne donnent qu'un mode d'arbitrage purement théorique et incapable de rendre des services dans la pratique.

On pourra tenter un arbitrage sur le même sujet en opérant d'une manière toute contraire à la précédente, c'est-à-dire en prenant les deux chevaux et en donnant la combinaison. Il suffira, pour obtenir les valeurs de p, q, r, D, de changer les signes de celles fournies par les formules (35). Alors D qui est égal à $r-p-q$ aura pour expression

$$
D = \frac{1}{1+\dfrac{1}{c+1}-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{b+1}}
\times\left[A\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{a+1}\right)+B\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{b+1}\right)-\frac{C}{c+1}\right].
$$

Si l'on a $\frac{1}{c+1} > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, condition nécessaire et suffisante pour que p, q, r soient positifs, la valeur de D sera toujours négative, et il n'y aura pas d'arbitrage possible.

On peut essayer, d'une autre manière, un arbitrage sur le même sujet. On pourra prendre l'un des chevaux et donner la combinaison et l'autre cheval, ce qui peut se faire de deux façons différentes. Le système d'équations répondant à cette question serait obtenu en changeant, dans celui déjà étudié, les signes de q et r. Or les numérateurs de p et q, d'après les formules, sont toujours positifs; il en résulterait que p et q seraient de signes contraires. L'arbitrage n'est donc pas possible.

On peut enfin donner l'un des chevaux et prendre la combinaison et l'autre cheval, et cela de deux manières différentes; mais alors, si le cheval qu'on a donné arrive et si celui qu'on a pris n'arrive pas, on perd les trois paris à la fois. L'arbitrage sera donc impossible.

Quatrième exemple. — Dans une même course, on peut avoir l'idée d'un arbitrage sur la combinaison du premier et du second et sur les deux mêmes chevaux considérés isolément comme premier et comme second.

On donnera un cheval premier et l'autre cheval second, et l'on prendra la combinaison.

Cette question revient à celle que nous venons d'analyser. Il n'y aura rien à changer aux résultats obtenus, si l'on convient de désigner par a la cote du premier, b celle du second et c celle de la combinaison.

Cinquième exemple. — Soit un cheval engagé dans deux courses, avec la cote a dans la première, b dans la seconde, et c comme premier dans l'une des deux courses, sans préciser laquelle. On peut chercher à faire un arbitrage sur une pareille question.

On prend le cheval premier dans chacune des deux courses et on le donne premier dans l'une quelconque.

Quatre cas pourront se présenter :

1° Le cheval arrivera dans la première course et pas dans la seconde;

2° Il arrivera dans la seconde et pas dans la première;

3° Il n'arrivera dans aucune des deux courses;

4° Il arrivera dans les deux.

Ce qui donne lieu, en continuant à employer les notations déjà adoptées, aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} ap - q - cr &= \mathrm{A}, \\ -p + bq - cr &= \mathrm{B}, \\ -p - q + r &= \mathrm{C}, \\ ap + bq - cr &= \mathrm{D}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces quatre équations, nous considérerons comme inconnues p, q, r, D. Notons que, d'après la nature de la question, c devra être la plus petite des trois cotes considérées.

En résolvant les équations, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} p &= \left[\frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + \mathrm{A}\right]\frac{1}{a+1}, \\ q &= \left[\frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + \mathrm{B}\right]\frac{1}{b+1}, \\ r &= \frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}\,\frac{1}{c+1}, \\ \mathrm{D} &= \frac{\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{b+1}\right) + \mathrm{B}\left(\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1}\right) + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Lorsque la condition $\frac{1}{c+1} > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ sera vérifiée, ces quatre valeurs seront toujours positives, et un arbitrage sera possible.

Si l'on veut obtenir un bénéfice uniforme dans les trois premiers cas, les formules donneront

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{P}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}} \frac{1}{a+1}, \\ q &= \frac{P}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}} \frac{1}{b+1}, \\ r &= \frac{P}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}} \frac{1}{c+1}, \\ D &= P\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}}\right); \end{aligned} \right.$$

d'où l'on voit que, quel que soit le bénéfice qu'on se fixe pour les trois premiers cas, celui qu'on obtiendra dans le quatrième sera de beaucoup le plus important.

Prenons un exemple numérique. Supposons que les cotes d'un cheval comme premier soient 3 et 4 dans la première et la seconde course et 1 comme premier dans l'une quelconque des deux courses, et qu'on veuille gagner 100^{fr} dans les trois premiers cas. On prendra le cheval pour 500^{fr} et 400^{fr} dans chaque course, et on le donnera pour 1000^{fr} dans l'une des deux qu'on ne précise pas. Le bénéfice obtenu, s'il arrive dans les deux courses, sera de

$$2100^{fr}.$$

On pourrait avoir l'idée de faire l'arbitrage d'une manière inverse de la précédente, c'est-à-dire en donnant le cheval premier dans chaque course et en le prenant premier dans l'une d'elles. Les équations qui serviraient

à l'étude directe de cette question ne diffèrent de celles que nous venons de résoudre que par le signe de p, q, r; on connaîtra donc facilement les valeurs de ces inconnues. Le quatrième cas donne pour valeur D du bénéfice $cr - ap - bq$. Or, si l'on y porte les valeurs de p, q, r, on trouve

$$D = \frac{1}{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1}} \times \left[A\left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1}\right) + B\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{c+1}\right) - C\left(1 - \frac{1}{c+1}\right)\right].$$

Si $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} > \frac{1}{c+1}$, la valeur de D sera toujours négative. Si cette inégalité n'était pas vérifiée, les valeurs de p et q seraient négatives. Il n'y aurait donc pas d'arbitrage possible.

Sixième exemple. — Prenons maintenant un exemple d'arbitrage à quadruple opération.

Soit un cheval engagé dans deux courses différentes et coté a et b dans chacune d'elles. Soient c sa cote quand on parie qu'il arrivera premier dans l'une ou dans l'autre des deux courses, sans préciser laquelle, et d sa cote quand on parie qu'il gagnera les deux courses.

Remarquons, d'après cela, que, à un même moment sur le marché, c sera la plus petite des quatre cotes, et d la plus grande.

On donne le cheval premier dans chacune des deux courses, on le prend premier dans l'une des deux qu'on ne précise pas, et on le prend aussi premier dans les deux ensemble.

Il y aura, dans l'examen de la question, quatre cas à considérer :

1° Le cheval gagne seulement la première course;

2° Il gagne seulement la seconde;

3° Il gagne les deux ;

4° Il n'en gagne aucune.

Ces différents cas se traduiront par les quatre équations suivantes, en appelant A, B, C, D les bénéfices obtenus dans chaque hypothèse et p, q, r, s les divers enjeux :

$$\left\{\begin{aligned} -ap + q + cr - s &= \mathrm{A}, \\ p - bq + cr + ds &= \mathrm{B}, \\ -ap - bq + cr - ds &= \mathrm{C}, \\ p + q - r - s &= \mathrm{D}. \end{aligned}\right.$$

Les racines de ce système de quatre équations fourniront les valeurs de p, q, r, s :

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
p &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{b+1}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{d+1}\right)\\ +\frac{\mathrm{C}}{d+1}+\mathrm{D}\left(1-\frac{1}{c+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{a+1},\\
q &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{d+1}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{a+1}\right)\\ +\frac{\mathrm{C}}{d+1}+\mathrm{D}\left(1-\frac{1}{c+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{b+1},\\
r &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{d+1}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{d+1}\right)\\ +\frac{\mathrm{C}}{d+1}+\mathrm{D}\left(1-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}+\frac{1}{d+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{c+1},\\
s &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{b+1}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{a+1}\right)\\ +\mathrm{C}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}\right)+\mathrm{D}\left(1-\frac{1}{c+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}.
\end{aligned}\right.$$

D'après ce que nous avons dit sur les grandeurs relatives des diverses cotes qui figurent dans ces formules, les numérateurs de p et q seront toujours positifs. Il est donc nécessaire et suffisant, pour que p et q soient positifs, que le dénominateur commun soit positif. Dans la valeur de s, les coefficients de A, B, D sont positifs; quant à celui de C, il le sera aussi quand la condition précédente sera satisfaite. Comme on dispose entièrement de A, B, C, D, on pourra toujours les prendre tels que la valeur de r soit positive. On peut donc dire que la condition à laquelle doivent satisfaire les cotes pour que l'arbitrage soit possible est la suivante :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}>\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}.$$

Quand on se propose d'obtenir un bénéfice uniforme P en toute hypothèse, les formules se simplifient notablement et deviennent

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
p &= \frac{\mathrm{P}}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{a+1},\\
q &= \frac{\mathrm{P}}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{b+1},\\
r &= \frac{\mathrm{P}}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{c+1},\\
s &= \frac{\mathrm{P}}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{d+1}.
\end{aligned}\right.$$

Prenons un exemple numérique. Soit un cheval coté 3 dans la première course, 5 dans la seconde, 2 premier dans l'une ou l'autre, 19 premier dans les deux. Les enjeux, pour obtenir un bénéfice uniforme de 100^{fr}, de-

vront être les suivants :

$$750^{fr},\quad 500^{fr},\quad 1000^{fr},\quad 150^{fr}.$$

On pourra, sur le même sujet, faire un arbitrage de la manière contraire, lorsqu'on aura

$$\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}>\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1},$$

en prenant le cheval premier dans chacune des deux courses isolément et en le donnant premier dans l'une ou l'autre. En effet, les valeurs de p, q, r, s seront les mêmes en valeur absolue, mais de signe contraire.

Il y aura donc toujours un arbitrage possible, pourvu qu'on n'ait pas $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}$.

SUR UN SYSTÈME DE CONIQUES DONT L'ÉQUATION A SES COEFFICIENTS FONCTIONS LINÉAIRES DE DEUX PARAMÈTRES;

Par M. A. RÉMOND,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de discuter la nature et la position d'une conique Γ dont l'équation a tous ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres variables.

Salmon a montré (*Sections coniques*, p. 388) que l'étude de certaines propriétés d'un système de coniques dont l'équation est

$$(1)\qquad \alpha U + \beta V + W = 0,$$

α, β étant deux indéterminées, $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ les équations de trois coniques du plan, est intimement

liée à celle des courbes du troisième ordre. Certains résultats lui sont fournis avec beaucoup d'élégance (*Courbes planes*) par les propriétés des formes algébriques.

On peut, en modifiant la forme de l'équation (1), faire l'étude de ce système de coniques sans sortir du programme de la classe de Mathématiques spéciales.

Posons (axes rectangulaires)

$$\begin{aligned} U &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \\ V &= A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F', \\ W &= A''x^2 + 2B''xy + C''y^2 + 2D''x + 2E''y + F''. \end{aligned}$$

On conclut

$$\begin{aligned} \alpha U + \beta V + W = (A\alpha + A'\beta + A'')x^2 \\ + 2(B\alpha + B'\beta + B'')xy + \ldots = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire, X, Y, ... désignant des fonctions linéaires de α, β,

$$Xx^2 + 2Zxy + Yy^2 + 2X'x + 2Y'y + Z' = 0.$$

Nous désignerons par M le point dont les coordonnées sont (α, β), et nous supposerons construit le triangle de référence dont les côtés sont

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

I. — Nature des coniques représentées par cette équation.

2. Nous voyons, en formant la fonction *caractéristique*

$$\delta = XY - Z^2,$$

que la conique Γ est une parabole si le point M se meut sur la conique Γ' ayant pour équation

$$XY - Z^2 = 0.$$

Γ' est tangente aux droites $X = 0$, $Y = 0$, à leur ren-

contre avec la droite $Z = 0$; elle est dans la région du plan où les fonctions X, Y donnent un produit positif.

Deux cas peuvent se présenter suivant que les points situés à l'intérieur du triangle de référence ABC sont dans une région où le produit des fonctions X, Y est positif ou négatif.

a. La conique Γ' est alors tangente intérieurement aux droites $X = 0$, $Y = 0$: c'est une ellipse, une parabole ou une hyperbole; dans le cas d'une parabole, on peut la construire avec la règle seule, la double droite $Z^2 = 0$ formant une parabole singulière passant aux quatre points de rencontre de $X = 0$, $Y = 0$ avec $Z^2 = 0$.

b. Dans la seconde hypothèse, la conique Γ', tangente extérieurement aux droites $X = 0$, $Y = 0$, est une hyperbole.

Remarque. — Les droites

$$\begin{cases} X + Y = 0, \\ X - Y = 0, \end{cases}$$

conjuguées harmoniques de $X = 0$, $Y = 0$, forment avec $Z = 0$ un triangle polaire conjugué AED par rapport à la conique Γ'; le sommet

$$D \begin{cases} X - Y = 0, \\ \quad\;\; Z = 0 \end{cases}$$

est toujours intérieur à la conique Γ', et $X + Y = 0$ est le côté du triangle autopolaire opposé au sommet intérieur à la conique.

La conique Γ' est effective tant que les droites $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ forment un triangle de référence. Si l'une des droites $X = 0$, $Y = 0$ s'éloigne indéfiniment, Γ' devient une parabole; si $Z = 0$ s'éloigne à l'infini, Γ' de-

vient une hyperbole asymptote aux côtés restant à distance finie.

3. Quand le point D est à distance finie, il est intéressant de considérer le cas où ce point devient un foyer de Γ'. On peut écrire l'équation de cette conique

$$\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + Z^2 = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2,$$

en mettant en évidence les tangentes issues du sommet D du triangle autopolaire.

Ce sommet sera foyer si les tangentes qui en partent sont les droites isotropes. Dans ce cas, la droite

$$X + Y = 0$$

est la directrice correspondant à ce foyer.

En revenant au signe de

$$\delta = XY - Z^2,$$

nous voyons que le point $A \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ est toujours dans la région négative déterminée par la conique Γ'; dès lors la région dans laquelle se trouve le point A est en même temps celle dans laquelle doit se mouvoir le point $M(\alpha, \beta)$ pour que la conique Γ soit une hyperbole. La région opposée est celle dans laquelle doit se mouvoir le point M pour que Γ soit une ellipse.

4. Les positions du point M, pour lesquelles Γ est une hyperbole équilatère, sont situées sur la droite

$$X + Y = 0.$$

Il existe une seule position de M qui donne à l'hyperbole des directions asymptotiques déterminées.

Quand M vient en A, l'hyperbole équilatère Γ a ses

asymptotes parallèles aux axes de coordonnées; quand il vient en E, les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux bissectrices de ces axes.

5. Il existe, en général, une position unique du point M pour laquelle la conique Γ devient un cercle; il faut, en effet, que l'on ait simultanément

$$\begin{cases} Z = 0, \\ X - Y = 0. \end{cases}$$

Cette position unique est celle du point D.

Il en résulte que, si D est un foyer de Γ′, les positions du point M, telles que Γ soit une hyperbole équilatère, sont sur la directrice correspondant à ce foyer.

II. — Cas ou la conique Γ devient un système de droites.

6. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que, au lieu de six fonctions linéaires différentes, il n'entre dans l'équation étudiée que trois fonctions X′, Y′, Z′, et nous poserons

$$X' = aX,$$
$$Y' = bY,$$
$$Z' = cZ,$$

a, b, c étant des coefficients numériques, ainsi que d, e, f des équations suivantes.

Les termes du premier degré et le terme indépendant qu'on écrit généralement

$$2Dx + 2Ey + F$$

s'obtiendront en remplaçant les coefficients D, E, F par les fonctions X′, Y′, Z′ permutées entre elles. Six équa-

tions sont à discuter

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eYy + fZ = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dYx + 2eXy + fZ = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dXx + 2eZy + fY = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dZx + 2eXy + fY = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dZx + 2eYy + fX = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dYx + 2eZy + fX = 0.$$

Un cas intéressant est celui où les coefficients numériques a, b, $\ldots$, f sont égaux entre eux. Nous indiquerons le résultat relatif à ce cas chaque fois qu'il sera utile à connaître.

7. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eYy + fZ = 0$$

l'équation de la conique Γ.

On peut écrire le discriminant de la fonction premier membre

$$\Delta = (acf + 2bde)XYZ - ae^2XY - cd^2YX^2 - fb^2Z^3$$

ou

$$\Delta = XY(\lambda Z + \mu X + \nu Y) - fb^2Z^3.$$

Γ sera donc un système de deux droites quand le point M sera mobile sur la cubique C :

$$XY(\lambda Z + \mu X + \nu Y) - \pi Z^3 = 0.$$

Cette équation met en évidence la droite des trois points d'inflexion $Z = 0$ et les tangentes en ces points

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad \lambda Z + \mu X + \nu Y = 0,$$

etc.

8. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eXy + fZ = 0$$

l'équation de la conique Γ.

Ce sera un système de deux droites si le point M se meut sur la courbe C dont l'équation est

$$\lambda XYZ + \mu X^3 + \nu Y^3 + \pi Z^3 = 0,$$

cubique non singulière (forme canonique de Salmon, *Courbes planes*).

Dans le cas particulier où les coefficients numériques $a, b, \ldots, f$ sont égaux, le discriminant devient

$$3XYZ - X^3 - Y^3 - Z^3 = 0,$$

et la cubique précédente se décompose en une droite

$$X + Y + Z = 0$$

et une conique

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - ZX - ZY - XY = 0.$$

9. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eZy + fY = 0$$

l'équation de la conique Γ.

La cubique C, sur laquelle doit se mouvoir le point M pour que Γ soit un système de deux droites, a pour équation

$$Z^2(\lambda X + \mu Y) - XY(\lambda' X + \mu' Y) = 0,$$

où l'on a, en évidence, trois tangentes

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad \lambda' X + \mu' Y = 0,$$

issues d'un même point; la droite $Z = 0$ des points de contact de ces tangentes, etc.

Dans le cas où les coefficients $a, b, \ldots, f$ sont égaux, la cubique précédente se décompose en une droite

$$X - Y = 0$$

et la conique Γ'

$$XY - Z^2 = 0;$$

Γ ne peut donc pas être une parabole effective, etc.

10. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dZx + 2eXy + fY = 0$$

l'équation de la conique Γ.

Celle de la cubique C peut s'écrire

$$Z^2[\lambda X + \mu Y] - X[\lambda'^2 X^2 \pm \mu'^2 Y^2] = 0,$$

même forme que la précédente; deux tangentes étant tantôt réelles, tantôt imaginaires, etc.

Dans le cas où les coefficients a, b, ..., f sont égaux, cette équation devient

$$(X - Y)[2Z^2 - X(X + Y)] = 0.$$

11. L'équation de la conique Γ étant

$$aXx^2 + 2bZxy + CYy^2 + 2dZx + 2eYy + fX = 0,$$

l'équation de la cubique C peut s'écrire

$$Z^2(\lambda Y + \mu X) - XY(\lambda' Y + \mu' X) = 0 \qquad (\text{voir } c).$$

12. L'équation de Γ étant

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eZy + fX = 0,$$

la cubique C a pour équation

$$Y^2(\lambda X + \mu Y) - Z^2(\lambda' X + \mu' Y) = 0.$$

Dans le cas où les coefficients a, b, ..., f sont égaux, cette cubique se décompose en

$$\begin{cases} X - Y = 0, \\ Y(X + Y) - Z^2 = 0. \end{cases}$$

Nota. — Dans l'indication des résultats généraux qui précèdent, nous n'avons pas parlé des systèmes de droites réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, parallèles ou se coupant; nous n'avons pas non plus distingué

les positions du point M qui donnent des ellipses réelles de celles qui donnent des ellipses imaginaires.

Les courbes, lieux de M, qui séparent les régions du plan correspondant à ces diverses propriétés sont des coniques dont on détermine facilement la position par rapport au triangle de référence

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Nous ferons seulement remarquer que la connaissance des résultats de la discussion de l'équation générale, dans le cas où les coefficients a, b, ..., f sont égaux, permet de former très rapidement des équations générales de coniques renfermant deux paramètres et dont l'étude complète n'exige pas la connaissance de propriétés autres que celles des courbes du second ordre.

Cette remarque permettra de combler la lacune regrettable qui existe, à ce sujet, dans les exercices proposés dans les divers Traités de Géométrie analytique.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUIVALENCES ALGÉBRIQUES ET L'ÉLIMINATION;

Par M. H. LAURENT.

I. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un système de n polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que nous appellerons *diviseurs* et que nous supposerons de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectivement.

Nous appellerons polynôme *réduit* un polynôme entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne contenant pas de termes divisibles par $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$.

Avec un certain nombre d'auteurs, nous distingue-

rons dans un terme $a\,x_1^\alpha x_2^\beta\ldots x_n^\lambda$ deux parties, son *argument* $x_1^\alpha x_2^\beta\ldots x_n^\lambda$ qui contient les variables et son *coefficient* a.

Le nombre des termes d'un polynôme réduit est $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$. En effet

$$(1+x_1+x_2+\ldots+x_1^{m_1-1})(1+x_2+\ldots+x_2^{m_2-1})\ldots \times (1+x_n+x_n^2+\ldots+x_n^{m_n-1})$$

est un polynôme réduit dont tous les coefficients sont égaux à l'unité; le nombre de ses termes est égal à la valeur numérique qu'il prend pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1:$$

cette valeur est bien $m_1 m_2 \ldots m_n$.

Nous dirons que deux polynômes F et f sont *équivalents* par rapport aux diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et nous écrirons

$$F \equiv f,$$

si l'on a identiquement

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant des polynômes entiers en x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons toujours que :

1° Les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont choisis de telle sorte que les équations

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

ont précisément $m_1 m_2 \ldots m_n = \mu$ solutions communes finies, bien déterminées et distinctes;

2° En désignant les solutions communes de ces

équations par

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \ldots, & \alpha_{n\mu}, \end{cases}$$

nous supposerons le déterminant

$$(3)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{11}^{m_1-1}\alpha_{21}^{m_2-1}\ldots\alpha_{n1}^{m_n-1} \\ 1 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{12}^{m_1-1}\alpha_{22}^{m_2-1}\ldots\alpha_{n2}^{m_n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & \alpha_{1\mu} & \alpha_{2\mu} & \ldots & \alpha_{1\mu}^{m_1-1}\alpha_{2\mu}^{m_2-1}\ldots\alpha_{n\mu}^{m_n-1} \end{vmatrix}$$

différent de zéro. Dans ce déterminant, la $i^{\text{ième}}$ ligne contient tous les arguments réduits que l'on peut former avec les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans lesquels on aurait remplacé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement par $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$; il a donc μ lignes et μ colonnes. Ce déterminant est ce que nous appellerons le *déterminant* des diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Un polynôme réduit est alors bien déterminé quand on se donne les μ valeurs qu'il prend pour μ systèmes de valeurs des variables qui annulent $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

De là résulte qu'un polynôme réduit équivalent à zéro est identiquement nul, et que, par suite, si un polynôme a un équivalent réduit, il ne peut en avoir qu'un seul.

Nous allons maintenant montrer qu'étant donné un polynôme, il existe toujours un polynôme réduit équivalent.

Soient

$$\varphi_1 = \Sigma a_1 x_1^i x_2^j \ldots x_n^k, \qquad \varphi_2 = \Sigma a_2 x_1^i x_2^j \ldots x_n^k, \qquad \ldots$$

les identités qui servent à définir les polynômes φ_1, φ_2, ..., multiplions la première par tous les arguments d'un polynôme réduit de degré $p - m_1$, la seconde par

tous les arguments d'un polynôme réduit de degré $p - m_2$, etc. Désignons par

$$N(x) = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)}{1.2.3\ldots x}$$

le nombre des termes d'un polynôme de degré x à n variables; nous aurons alors

$$N(p - m_1) + N(p - m_2) + \ldots + N(p - m_n)$$

identités qui permettront de calculer tous les arguments non réduits d'un degré moindre que p ou égal à p. Il est facile en effet de voir que les identités en question sont en nombre égal ou supérieur à celui des arguments que l'on veut calculer.

Considérons en effet un argument non réduit à calculer; supposons-le divisible par $x_1^{m_1}$, supprimons dans cet argument le facteur $x_1^{m_1}$ il se réduira à un argument de degré $p - m_1$ ou de degré inférieur; si alors on prend tous les arguments de degrés $p - m_1, p - m_2, \ldots, p - m_n$ ou de degrés inférieurs, et si on les multiplie par $x_1^{m_1}$, $x_2^{m_2}$, ..., on aura tous les arguments de degré p à calculer au moins une fois, leur nombre est donc au plus égal à

$$N(p - m_1) + N(p - m_2) + \ldots + N(p - m_n);$$

on aura donc, comme nous l'avions annoncé, autant et même plus d'équations qu'il n'en faut pour calculer tous les arguments non réduits en fonction des autres; en substituant ces valeurs dans un polynôme quelconque F et en négligeant les multiples de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, on aura l'équivalent réduit de ce polynôme F.

Bien que l'on ait en général plus d'équations qu'il n'est nécessaire pour opérer la réduction, on pourrait craindre que les équations du premier degré qui servent à calculer les arguments non réduits fussent incompatibles : nous allons prouver qu'il n'en est rien.

Appelons, en effet, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ les arguments non réduits que l'on veut calculer $G_1, G_2, \ldots, G_k$; des expressions équivalentes à zéro, c'est-à-dire de la forme $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n$; enfin $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ des polynômes réduits, les équations qui donnent $r_1, r_2, \ldots$ sont de la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + \ldots + a_{1k} r_k = G_1 + \rho_1, \\ a_{21} r_1 + a_{22} r_2 + \ldots + a_{2k} r_k = G_2 + \rho_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si leur déterminant était nul, il existerait des multiplicateurs indépendants de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à savoir μ_1, $\mu_2, \ldots$, donnant lieu à l'identité

$$-(\mu_1 G_1 + \mu_2 G_2 + \ldots) = \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + \ldots$$

ou à la formule

$$\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 \ldots \equiv 0.$$

Le polynôme $\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + \ldots$ réduit étant nul, on aurait identiquement

$$\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + \ldots = 0$$

ou

$$\mu_1 G_1 + \mu_2 G_2 + \ldots = 0.$$

Le système (4) serait alors indéterminé : il y a donc un et un seul polynôme réduit équivalent à un polynôme donné.

Mais il ne faut pas oublier que Δ est supposé essentiellement déterminé et différent de zéro.

Remarque. — Le polynôme réduit équivalent à un polynôme donné ne contient pas en dénominateur les coefficients des diviseurs si ce n'est ceux dont le poids est nul : cela résulte de la manière même dont on calcule la valeur de ce polynôme.

II. Soient z un polynôme réduit, u un autre polynôme

réduit dont les coefficients soient des fonctions des coefficients du polynôme z; on pourra dire que u est une fonction de z, mais nous ne considérerons dans la suite que les fonctions ayant une *dérivée* $\frac{du}{dz}$, unique et bien déterminée. Pour que $\frac{du}{dz}$ ait une valeur bien déterminée, certaines équations de condition doivent être satisfaites dont nous nous occuperons plus tard.

Parmi les fonctions du polynôme réduit z, on distingue les fonctions entières qui sont de la forme

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

et qui ont évidemment des dérivées bien déterminées, et les fonctions implicites qui sont définies par des équations ou des équivalences dont les membres sont des fonctions entières de z et des fonctions inconnues. L'équation

$$AX \equiv B,$$

dans laquelle A et B sont des polynômes réduits entiers en z, définit ce que nous appellerons le quotient X de A et B et que nous représenterons par $\frac{A}{B}$; une fraction de la forme $\frac{A}{B}$ sera dite rationnelle, etc.

Les équivalences les plus intéressantes sont relatives à un diviseur unique de la forme $i^\mu \pm 1$, et nous allons tout d'abord les étudier, d'autant plus que les autres se ramènent à celles-ci.

Si l'on fait usage d'un seul diviseur $i^\mu - 1$, un polynôme réduit sera de la forme

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 i^2 + \ldots + z_{\mu-1} i^{\mu-1},$$

et l'équivalent réduit d'un polynôme quelconque sera le

reste de la division de ce polynôme par $i^\mu - 1$, on pourra obtenir ce reste en remplaçant dans le polynôme en question i^μ par 1, $i^{\mu+1}$ par i, et en général i^k par $i^{k'}$, k' désignant le reste de la division de k par μ.

Une fonction de z sera de la forme

$$u = u_0 + u_1 i + u_2 i^2 + \ldots + u_{\mu-1} i^{\mu-1},$$

$u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}$ désignant des fonctions de $z_0, z_1, \ldots, z_{\mu-1}$. Cherchons la condition pour que la fonction u ait une dérivée $\frac{du}{dz}$ bien déterminée ; on a

$$\frac{du}{dz} = \frac{\sum \left(\frac{\partial u_0}{\partial z_k} + i \frac{\partial u_1}{\partial z_k} + \ldots + i^{\mu-1} \frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_k} \right) dz_k}{\Sigma\, i^k\, dz_k},$$

et pour que $\frac{du}{dz}$ soit bien déterminé et ne dépende pas des rapports $dz_1, dz_2, \ldots, dz_{\mu-1}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial z_0} + i \frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \ldots + i^{\mu-1} \frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_0}, \\ = {} & i^{\mu-1} \frac{\partial u_0}{\partial z_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \ldots + i^{\mu-2} \frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_1}, \\ = {} & i^{\mu-2} \frac{\partial u_0}{\partial z_2} + i^{\mu-1} \frac{\partial u_1}{\partial z_2} + \ldots + i^{\mu-3} \frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial z_0} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_{\mu-1}}, \\ & \frac{\partial u_1}{\partial z_0} = \frac{\partial u_2}{\partial z_1} = \frac{\partial u_3}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial u_0}{\partial z_{\mu-1}}, \\ & \frac{\partial u_2}{\partial z_0} = \frac{\partial u_3}{\partial z_1} = \frac{\partial u_4}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial u_1}{\partial z_{\mu-1}}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Ces équations expriment que

$$\begin{array}{l} u_0\,dz_0 + u_{\mu-1}\,dz_1 + u_{\mu-2}\,dz_2 + \ldots + u_1\,dz_{\mu-1}, \\ u_1\,dz_0 + u_0\,dz_1 \quad + u_{\mu-1}\,dz_2 + \ldots + u_2\,dz_{\mu-1}, \\ u_2\,dz_0 + u_1\,dz_1 \quad + u_0\,dz_2 \quad + \ldots + u_3\,dz_{\mu-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ou que

$$\begin{array}{l} (u_0 + u_1 i + u_2 i^2 + \ldots + u_{\mu-1} i^{\mu-1}) \\ \quad \times (dz_0 + i\,dz_1 + \ldots + i^{\mu-1}\,dz_{\mu-1}) \end{array}$$

sont des différentielles exactes. De là un moyen d'écrire *a priori*, et sans effectuer de différentiations, une infinité d'expressions qui sont des différentielles exactes. Si l'on prend par exemple $u = z_0 + z_1 i + z_2 i^2 + \ldots$, on formera les différentielles exactes

$$\begin{array}{l} z_0\,dz_0 + z_{\mu-1}\,dz_1 + \ldots + z_1\,dz_{\mu-1}, \\ z_1\,dz_0 + z_0\,dz_1 \quad + \ldots + z_2\,dz_{\mu-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Si nous appelons conjuguées d'une expression réduite

$$z_0 + z_1 i + \ldots + z_{\mu-1} i^{\mu-1} = f(i)$$

les expressions $f(i^2), f(i^3), \ldots, f(i^\mu)$ que l'on obtient en remplaçant i par ses puissances, il est facile de voir que le produit de μ expressions conjuguées est équivalent à une expression indépendante de i; l'expression

$$f(i)\,f(i^2)\ldots f(i^\mu)$$

est, en effet, le premier membre de la résultante des équations

$$f(x) = 0, \qquad x^\mu - 1 = 0,$$

lorsque l'on suppose i racine $\mu^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire quand on remplace $i^{k\mu+\nu}$ par i^ν, et l'on a d'ailleurs

$$f(i)\,f(i^2)\ldots f(i^\mu) = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_{\mu-1} \\ z_{\mu-1} & z_0 & \ldots & z_{\mu-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_0 \end{vmatrix};$$

il est facile de vérifier la formule

$$\begin{vmatrix} du_0 & du_1 & \dots & du_{\mu-1} \\ du_{\mu-1} & du_0 & \dots & du_{\mu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ du_1 & du_2 & \dots & du_0 \end{vmatrix} = \frac{\partial(u_0, u_1, \dots, u_{\mu-1})}{\partial(z_0, z_1, \dots, z_{\mu-1})} \begin{vmatrix} dz_0 & dz_1 & \dots & dz_{\mu-1} \\ dz_{\mu-1} & dz_0 & \dots & dz_{\mu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dz_1 & dz_2 & \dots & dz_0 \end{vmatrix}.$$

Les formules (1) sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable; désignons par θ_0 la valeur commune des dérivés qui figurent dans la premièreligne, par θ_1 la valeur commune des dérivées qui figurent dans la seconde, etc., et supposons que $z_0, z_1, \dots, z_{\mu-1}$ désignent les normales menées d'un point M à des plans fixes formant un angle polyèdre à faces égales et à angles égaux. Les équations

$$u_0 = a_0, \qquad u_1 = a_1, \qquad \dots, \qquad u_{\mu-1} = a_{\mu-1},$$

dans lesquelles $a_0, a_1, \dots, a_{\mu-1}$ désignent des constantes arbitraires, représenteront μ familles de surfaces. Considérons les surfaces qui passent par le point M; pour avoir la normale en ce point à la surface $u_0 = a_0$, il faudra, en vertu d'un théorème bien connu de Poinsot, porter sur les droites $z_0, z_1, \dots, z_{\mu-1}$ des longueurs égales à $\frac{\partial u_0}{\partial z_0}, \frac{\partial u_0}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial u_0}{\partial z_{\mu-1}}$ ou à $\theta_0, \theta_{\mu-1}, \theta_{\mu-2}, \dots, \theta_1$ et en prendre la résultante. Pour avoir la normale en M à la surface $u_1 = a$, il faudra porter sur les droites $z_0, z_1, \dots, z_{\mu-1}$ des longueurs égales à $\theta_1, \theta_0, \theta_{\mu-1}, \dots, \theta_2$, et en prendre la résultante, et ainsi de suite. Les normales construites ainsi formeront alors elles-mêmes les arêtes d'un angle polyèdre ayant ses angles égaux et ses faces égales; ainsi :

On peut, et cela d'une infinité de manières, trouver des familles de surfaces, telles que les plans tangents en leurs points communs forment un angle polyèdre ayant ses faces et ses angles égaux.

Il existe évidemment un théorème analogue relatif à la Géométrie plane que nous pouvons nous dispenser d'énoncer. Nous donnerons seulement quelques exemples de surfaces remplissant les conditions énoncées.

Supposons $\mu = 3$; il existera des fonctions X, Y, Z de x, y, z donnant lieu aux équations aux dérivées partielles simultanées

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \\ \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \end{aligned} \right.$$

si l'on suppose successivement

$$\begin{aligned} X + iY + i^2 Z &= (x + iy + i^2 z)^2, \\ X + iY + i^2 Z &= (x + iy + i^2 z)^3, \\ X + iY + i^2 Z &= (x + iy + i^2 z)^{-1}, \end{aligned}$$

on est conduit aux systèmes suivants de surfaces qui, en leurs points de rencontre, ont des plans tangents formant des trièdres à faces égales et à angles égaux (a, b, c sont des constantes arbitraires) :

$$x^2 + 2yz = a, \qquad y^2 + 2xz = b, \qquad z^2 + 2xy = c;$$

$$\left\{ \begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = a, \\ & 3x^2 y + 3y^2 z + 3z^2 x = b, \\ & 3xy^2 + 3yz^2 + 3zx^2 = c; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + a(x^2 - yz) = 0, \\ & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + b(y^2 - zx) = 0, \\ & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + c(z^2 - xy) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions X, Y, Z satisfont, en vertu de (2), aux équations suivantes aux dérivées partielles, ainsi qu'il est bien facile de le vérifier,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial y\, \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y};$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 X}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 X}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 X}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On connaît ainsi une infinité de solutions de ces équations aux dérivées partielles, et ces solutions peuvent s'écrire en termes finis. Chaque diviseur que l'on choisira fournira des types d'équations aux dérivées partielles dont on pourra obtenir avec facilité une infinité d'intégrales sous forme finie.

III. Revenons au cas général où l'on considère un système de diviseurs quelconques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ fonctions de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Supposons toujours le déterminant Δ de ces diviseurs fini et différent de zéro, ce qui exige que les $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}, \ \alpha_{21}, \ \ldots, \ \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, \ \alpha_{22}, \ \ldots, \ \alpha_{n2}, \\ \ldots, \ \ldots, \ \ldots, \ \ldots \end{cases}$$

des équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

soient finies et distinctes.

Nous avons vu qu'il existait toujours un polynôme réduit prenant μ valeurs données pour les systèmes de valeurs des x annulant à la fois les φ, et que ce polynôme était bien déterminé; on peut calculer ce polynôme comme il suit :

Soit Δ_i ce que devient le déterminant Δ des diviseurs

quand on y remplace α_{1i} par x_1, α_{2i} par x_2, ..., α_{ni} par x_n; Δ_i s'annulera pour tous les systèmes de valeurs des x annulant les φ, excepté pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ..., $x_n = \alpha_{ni}$, et alors, pour ce système de valeurs, il se réduira à Δ. Le polynôme

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \mathrm{P}_i \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

se réduira donc, quel que soit i, à P_i pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ...; l'équivalent réduit d'un polynôme qui prend des valeurs déterminées pour les systèmes de valeurs des x qui annulent les φ est donc bien déterminé, puisque ses valeurs, pour des valeurs des x qui annulent les φ, sont bien déterminées; le polynôme en question, en appelant f son équivalent réduit, est de la forme

$$f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n;$$

enfin on voit que l'expression générale d'un polynôme, nul en même temps que les φ, est de la forme

$$\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n,$$

puisque son équivalent réduit est nul. Ces conclusions, bien entendu, sont toujours soumises à cette restriction que Δ est fini et différent de zéro.

Nous allons maintenant nous proposer, pour la théorie des équivalences algébriques, une série de questions analogues à celles qui se présentent dans la théorie des équations. Et d'abord nous allons nous proposer de résoudre l'équivalence du premier degré

$$(3) \qquad \mathrm{AX} \equiv \mathrm{B}.$$

A et B étant deux polynômes que l'on peut supposer réduits, il s'agit de trouver un polynôme réduit X satisfai-

sant à cette équivalence ou à l'identité

$$(4) \qquad AX = B + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n.$$

Appelons A_1, A_2, ... et B_1, B_2, ... les valeurs que prennent A et B pour les systèmes de valeurs des x contenus dans le Tableau (1), en général pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ...; la formule (3) donne

$$A_i X = B_i \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{B_i}{A_i};$$

si donc nous supposons A_1, A_2, ... différents de zéro, le polynôme X sera déterminé par cette condition qu'il devra prendre des valeurs données quand les φ s'annuleront; soit X un polynôme déterminé par cette condition de se réduire à $\frac{B_i}{A_i}$ pour $x_1 = \alpha_{1i}$, ... et d'être réduit, il satisfera à l'identité (4) ou à la congruence (3), car $AX - B$, étant nul avec les φ, sera bien de la forme $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n$.

Ainsi le polynôme réduit X existe et est bien déterminé quand A ne s'annule pas avec les φ.

A est ce que l'on peut appeler le diviseur, B le dividende et X le quotient de la division de B par A.

La division, dans la théorie des équivalences algébriques, n'est donc possible que quand le diviseur ne s'annule pas avec les polynômes diviseurs φ_1, φ_2, ...

Occupons-nous maintenant de la recherche du quotient. Si l'on pose

$$X = \Sigma q x_1^i x_2^j \ldots x_n^k,$$

et si l'on réduit le produit AX, on obtiendra un polynôme qui, identifié à B, fournira μ égalités qui, résolues par rapport à q_1, q_2, ..., fourniront les coefficients de X et, par suite, X lui-même. X sera alors mis sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D désignant des polynômes entiers par rapport

aux coefficients de A et des φ; D ne dépend pas de B; pour le calculer, on peut supposer $B = 1$; on a alors

$$A\frac{N}{D} = 1 \qquad \text{ou} \qquad AN = D,$$

formule qui donne

$$D = AN.$$

Quand les φ sont nuls à la fois, si N_i est la valeur de N pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ..., on a

$$D = A_1 N_1, \qquad D = A_2 N_2, \qquad \ldots :$$

donc D est divisible par A_1, A_2, ... et, par suite, par $A_1 A_2 \ldots A_\mu$, car $A_1 A_2 \ldots$, du premier degré par rapport aux coefficients de A, sont, en général, inégaux; ainsi

$$D = G A_1 A_2 \ldots A_\mu,$$

G désignant un polynôme entier par rapport aux coefficients de A et des φ, et l'on peut ajouter de degré o par rapport aux coefficients de A. Si l'on appelle R le premier membre de la résultante des équations

$$(5) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0, \qquad A = 0,$$

on pourra écrire

$$D = RG;$$

mais, D et R étant de poids μ par rapport aux coefficients des φ, G est de poids zéro : $D = 0$ est donc l'une des formes de la résultante des équations (5).

Il résulte de là ce fait important :

Pour trouver la résultante des équations (5), *il suffit de trouver le dénominateur du quotient de* B *par* A, B *désignant un polynôme quelconque.*

Ce dénominateur, qui se présente sous la forme d'un

déterminant indépendant de B, est ce que nous appellerons le module de A.

On peut déduire de là un moyen très simple pour former la résultante des équations (5) et que j'ai formulé, pour la première fois, dans mon *Traité d'Analyse*, sans démonstration :

Pour former la résultante des équations (5), *multipliez* A *successivement par les* μ *arguments réduits et réduisez les produits ainsi formés; soient* A_0, A_1, ..., A_μ *les résultats ainsi obtenus ; considérez, dans les équations*

$$(6) \qquad A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad \ldots, \quad A_\mu = 0,$$

les arguments réduits comme des inconnues distinctes, la résultante des équations (6) *sera la résultante cherchée.*

En effet, le premier membre de la résultante des équations (6) est un déterminant qui a les mêmes éléments que celui que l'on obtiendrait en multipliant A par un polynôme réduit $\Sigma q x_1^i x_2^j \ldots x_n^k$, en égalant à des quantités données les coefficients des arguments réduits, et en cherchant le dénominateur commun des valeurs des quantités q.

Cette méthode a beaucoup d'analogie, comme l'on voit, avec celle que M. Sylvester a fait connaître pour le cas de deux équations; elle ne se confond pourtant pas avec elle dans ce cas, et, même dans ce cas, elle est nouvelle quant à la forme; pour le fond, elle coïncide avec celle de Cauchy ou de M. Cayley, elle revient à ceci :

Pour éliminer x *entre les équations*

$$A(x) = 0, \qquad \varphi(x) = 0,$$

divisez $A(x)$, $xA(x)$, ..., $x^{m-1}A(x)$ [*où* m *est le degré de* $\varphi(x)$] *par* $\varphi(x)$. *Soient* A_0, A_1, ..., A_{m-1} *les restes* (*et, pour trouver ces restes, il n'y a au fond besoin de faire qu'une seule division*), *la résultante cherchée est le résultat de l'élimination de* x, x^2, ..., x^{m-1} *entre*

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{m-1} = 0.$$

Des considérations précédentes, il résulte qu'un produit de plusieurs facteurs peut être équivalent à zéro sans qu'aucun de ses facteurs supposés réduits, si l'on veut, soit nul.

La résolution d'un système de plusieurs équivalences du premier degré

$$\begin{array}{l} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1p}X_p \equiv B_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{p1}X_1 + A_{p2}X_2 + \ldots + A_{pp}X_n \equiv B_p, \end{array}$$

où les A et les B sont, si l'on veut, des polynômes réduits, ne présente aucune difficulté; en posant, en effet,

$$\Theta = \Sigma \pm A_{11}A_{22}\ldots A_{pp},$$

on déduit des formules précédentes

$$X_1\Theta \equiv B_1\frac{\partial\Theta}{\partial A_{11}} + B_2\frac{\partial\Theta}{\partial A_{21}} + \ldots + B_p\frac{\partial\Theta}{\partial A_{p1}};$$

d'où l'on peut tirer X, comme on l'a montré tout à l'heure. On peut aussi remarquer que les X sont connus pour les valeurs des x qui annulent les φ. Cette théorie donne lieu à une discussion qui ne présente aucune difficulté. (*A suivre*)

PUBLICATIONS RÉCENTES.

TIRAGES A PART.

A proposito d'un problema sulle eliche e *Alcune misure negli iperspazii;* par M. E. Cesaro. Extraits du *Giornale di Matematiche,* t. XXIV; 1886.

On a systems of coordinates and *On the points and tangents common to two conics;* by professor Genese. Extraits des *Proceedings of the London mathematical Society,* vol. XII and XIV; 1881 et 1883.

Notice nécrologique sur S. Realis et *Le centre de la conique de Kiepert;* par M. *G. de Longchamps.* Extraits du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales;* 1886.

Sur le quadrilatère harmonique et *Sur le point de Tarry;* par M. J. Neuberg. Extraits de *Mathesis,* t. V et VI; 1885 et 1886.

Mémoire d'Optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques; par M. A. Mannheim. Extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. II; 1886.

Étude sur les surfaces gauches; par M. Ed. Dewulf. Extrait des *Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. III; 1886.

Solution of solvable irreductible quintic equations, without the aid of a resolvent sextic; by George Paxton Young. Extrait de *American Journal of Mathematics,* n° 2, vol. VII.

SUR L'ÉVALUATION APPROCHÉE DE CERTAINES SÉRIES;

Par M. E. CESARO.

1. La formule (4) de notre article *Sur la série de Lambert* [1] est susceptible, avons-nous dit, de nombreuses applications. Déterminons, par exemple, la série des nombres u, de manière que l'on ait

$$(9)\qquad (u_p - 1)f(p) = (u_{p-1} + 1)f(p-1).$$

La formule (4) devient

$$(10)\qquad U_n + V_n = \frac{1}{2}\log\frac{(u_n+1)f(n)}{(u_0+1)f(0)}.$$

Ayant attribué à u_0 une valeur arbitraire, il est facile de reconnaître que, pour satisfaire à (9), il faut prendre

$$(11)\qquad u_p = 1 + \frac{2}{f(p)}\left[\frac{u_0+1}{2}f(0) + f(1) + \ldots + f(p-1)\right].$$

Si l'on fait, par exemple, $f(p) = x^p$, on trouve

$$u_p = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-x^p}{x^p} + \frac{u_0}{x^p}.$$

Ainsi, nous pouvons prendre, pour x différent de l'unité,

$$u_0 = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\alpha}{\alpha},\qquad u_p = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\alpha x^p}{\alpha x^p}.$$

Cela étant, si l'on pose

$$S_n = \frac{\alpha x}{1-\alpha x} + \frac{\alpha x^2}{1-\alpha x^2} + \frac{\alpha x^3}{1-\alpha x^3} + \ldots + \frac{\alpha x^n}{1-\alpha x^n},$$

(1) Voir *Nouvelles Annales*, p. 106; 1886.

on a

$$(12)\quad \begin{cases} U_n = \dfrac{1-x}{1+x} \mathbf{S}_n, \\ U_n + V_n = \frac{1}{2}\log\left[1 + 2\alpha x \dfrac{1-x^n}{1-(2\alpha-1)x}\right], \end{cases}$$

et il nous reste à chercher des limites de V_n. Les premiers développements que nous avons donnés, dans ce but, dans l'article *Sur la série de Lambert,* sont indépendants de la valeur de u_0, de sorte que nous pourrons toujours écrire, conformément à l'inégalité (6),

$$(13)\qquad V - V_n < \frac{1}{6}\left[\frac{x}{u_n} - (1-x)(U - U_n)\right].$$

Or, à cause de

$$u_p < \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1}{\alpha x^p}, \qquad U - U_n = \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \frac{1}{u_p},$$

on a

$$U - U_n > \alpha\,\frac{1-x}{1+x} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} x^p = \frac{1-\alpha x^n}{1-x}\,\frac{x}{u_n}.$$

A fortiori, nous pourrons écrire, en vertu de (13),

$$V - V_n < \frac{\alpha}{6}\,\frac{x^{n+1}}{u_n}, \qquad V_n = V - \frac{\theta\alpha x^{n+1}}{6u_n},$$

θ étant une fraction proprement dite. Par conséquent, la formule (12) devient

$$(14)\quad \mathbf{S}_n = \frac{1+x}{1-x}\log\sqrt{\frac{1+x-2\alpha x^{n+1}}{1+x-2\alpha x}} + \frac{\theta\alpha^2 x^{2n+1}}{6(1-\alpha x^n)} + \text{const.},$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\sum_{p=n+1}^{p=\infty} \frac{\alpha x^p}{1-\alpha x^p} = \frac{1+x}{1-x}\log\sqrt{\frac{1+x}{1+x-2\alpha x^{n+1}}} - \frac{\theta\alpha^2 x^{2n+1}}{6(1-\alpha x^n)},$$

généralisation de la formule (8).

2. On peut prendre, d'après (11),

$$f(p) = 1, \qquad u_0 = 2x, \qquad u_p = 2(p + x),$$

et l'on est ainsi conduit à évaluer la série

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \ldots + \frac{1}{n+x}.$$

On a, en effet,

$$U_n = \tfrac{1}{2}\sigma_n(x), \qquad V - V_n = \frac{\theta}{12(n+x)^2}.$$

Par suite, l'égalité (10) devient

$$(15) \qquad \sigma_n(x) = C(x) + \log\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2x+1}\right) + \frac{\theta}{6(n+x)^2}.$$

Dans cette formule, $C(x)$ représente une fonction de x, *indépendante de* n. En particulier, pour $x = 0$, on voit que la somme des n premiers termes de la série harmonique est

$$\sigma_n(0) = C + \log\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\theta}{6n^2},$$

où

$$C = C(0) = 0,57721566490153 2 \ldots.$$

Il est facile d'exprimer la fonction $C(x)$ au moyen de la *fonction harmonique*

$$H(x) = \int_0^1 \frac{1-\varphi^x}{1-\varphi}\,d\varphi = \sum_{p=1}^{p=\infty}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+x}\right],$$

que l'on rencontre si fréquemment dans le calcul des éventualités arithmétiques. On doit remarquer, à cet effet, que, pour n infini,

$$\lim\,[\sigma_n(0) - \sigma_n(x)] = H(x);$$

d'où l'on tire, au moyen de (15),

$$C(x) = C - H(x) + \log(2x+1).$$

La formule (15) devient donc

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p+x} = C - H(x) + \log\left(n + x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\theta}{6(n+x)^2}.$$

On en déduit aisément d'autres relations intéressantes, telles que la formule

$$H(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+x}\right] + \log\left(1 + \frac{2x}{2n+1}\right) \pm \frac{\theta}{6n^2},$$

qui permet de calculer les valeurs de l'intégrale H avec une approximation aussi grande qu'on le désire.

3. La fonction harmonique est un cas particulier de la suivante :

$$\mathfrak{H}(x, y) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left[x^p \frac{1-x}{1-x^p} - x^{p+y} \frac{1-x}{1-x^{p+y}}\right].$$

On a, en effet,

$$\mathfrak{H}(1, y) = H(y).$$

Nous nous réservons de faire connaître, dans une autre Note, les propriétés, très intéressantes, de la fonction $\mathfrak{H}$. Remarquons ici que cette fonction intervient dans l'égalité (14), alors que l'on cherche à déterminer, en fonction de x et α, la *constante* qui figure dans le second membre. Si l'on désigne par $\mathbf{S}(x)$ *la somme de la série de Lambert,* on trouve aisément

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\alpha x^p}{1-\alpha x^p} = \frac{1-x}{1-x} \log\sqrt{1 - 2\alpha \frac{x^{n+1}}{1+x}}$$
$$+ \mathbf{S}(x) - \frac{1}{1-x} \mathfrak{H}\left(x, \frac{\log\alpha}{\log x}\right) + \frac{\theta\alpha^2 x^{2n+1}}{6(1-\alpha x^n)}.$$

Toutes ces séries sont susceptibles d'une transforma-

tion remarquable, que nous avons indiquée ailleurs ([1]).
On a

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\alpha x^p}{1-\alpha x^p} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{1-x^p}\,\frac{\alpha x}{1-\alpha x}\,\frac{\alpha x^2}{1-\alpha x^2}\cdots\frac{\alpha x^p}{\alpha-\alpha x^p}.$$

On en déduit

$$\mathfrak{H}(x,y) = \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p+1}\,\frac{1-x}{1-x^p}$$
$$\times\left\{\frac{x}{1-x}\,\frac{x^2}{1-x^2}\cdots\frac{x^p}{1-x^p} - \frac{x^{1+y}}{1-x^{1+y}}\,\frac{x^{2+y}}{1-x^{2+y}}\cdots\frac{x^{p+y}}{1-x^{p+y}}\right\}.$$

4. Une autre application intéressante est fondée sur l'identité

$$1+\sum_{p=1}^{p=n} \frac{a_p}{(1-a_0)(1-a_1)\ldots(1-a_p)}$$
$$= \frac{1}{(1-a_0)(1-a_1)\ldots(1-a_n)},$$

laquelle, si l'on fait

$$f(p) = \frac{a_p}{(1-a_0)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_p)},$$

permet de prendre

$$u_0 = \frac{2-a_0}{a_0}, \qquad u_p = \frac{2-a_p}{a_p}.$$

Dans ce cas, la formule (10) devient

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\ldots(1-a_n) = e^{-2(U_n+V_n)},$$

et il est possible de l'employer pour l'évaluation approchée de certains produits. En particulier, on l'applique sans peine à la recherche de formules analogues à celle

---

([1]) *Voir,* dans *Mathesis,* l'article : *Source d'identités.*

de Stirling, et de formules plus générales, que l'on obtient en prenant

$$a_p = 2\alpha x^p, \qquad u_p = \frac{1 - \alpha x^p}{\alpha x^p}.$$

Enfin, il est évident que les procédés dont nous nous sommes servi dans cette Note sont applicables à un développement quelconque, différent de la relation (1). Il y a plus : cette même égalité, mise sous une autre forme, donne lieu à une infinité d'autres formules d'approximation. Si, par exemple, on multiplie par p la formule (1), on a

$$2(1 + v_p) = p \log \frac{p + 1}{p - 1}, \qquad v_p < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p + 1}\right);$$

puis

$$\left(\frac{u_1 + 1}{u_1 - 1}\right)^{u_1} \left(\frac{u_2 + 1}{u_2 - 1}\right)^{u_2} \left(\frac{u_3 + 1}{u_3 - 1}\right)^{u_3} \cdots \left(\frac{u_n + 1}{u_n - 1}\right)^{u_n} = e^{2(n + V_n)},$$

où

$$V - V_n < \frac{1}{6} \sum_{p = n + 1}^{p = \infty} \left[\frac{1}{u_p - 1} - \frac{1}{u_p + 1}\right].$$

On retrouve, au moyen de la dernière égalité, la formule de Stirling, et l'on peut même démontrer, plus généralement, que

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3) \ldots (x + n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1 + x)} (x + n)^{x + n + \frac{1}{2}} e^{-(x + n) + \frac{\theta}{12(x + n)^2}}.$$

Cette relation peut servir, avec fruit, à l'étude de la fonction Γ. Il est vrai que ces résultats sont fort connus ; mais il y a toujours quelque utilité à pouvoir y parvenir par des considérations purement élémentaires.

5. Dans toutes ces recherches, la difficulté réside

dans l'évaluation approchée de V_n, que l'on effectue toujours d'après l'inégalité

$$V - V_n < \frac{1}{6} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \left[\frac{1}{u_p - 1} + \frac{1}{u_p + 1} - \frac{2}{u_p} \right],$$

lorsque la formule (1) est prise comme point de départ. Il est facile de voir que, *si le rapport de u_p à $f(p)$ est continuellement croissant, on a*

$$V_n = V - \frac{\theta}{6 u_n^2}.$$

On suppose, bien entendu, comme dans tout ce qui précède, que les nombres u sont positifs. Si, par exemple, on veut appliquer le dernier résultat au cas de

$$f(p) = x^p, \qquad u_p = \frac{1+x}{1-x} \, \frac{1 - \alpha x^p}{\alpha x^p} \qquad (0 < x < 1),$$

on trouve que l'on doit avoir

$$\alpha < \frac{1+x}{x^{p+1}},$$

ce qui est toujours vrai, puisque les nombres u ne sauraient être tous positifs, si α surpassait $\frac{1}{x}$. Pour des valeurs suffisamment élevées de n, la nouvelle expression de V_n finit par être toujours plus approchée que celle que nous avons trouvée au commencement de cette Note. En général, il est possible d'obtenir des résultats de plus en plus approchés en observant que la limite supérieure trouvée pour $V - V_n$ est la somme de la série convergente

$$\frac{1}{6} \sum_{p=}^{p=\infty} \left[\frac{1}{u_{n-p}(u_{n+p} - 1)} - \frac{1}{u_{n+p}(u_{n+p} + 1)} \right],$$

dont les termes, alternativement positifs et négatifs, vont en décroissant, pourvu que les nombres u augmentent plus rapidement que les valeurs correspondantes de la fonction f.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUIVALENCES ALGÉBRIQUES ET L'ÉLIMINATION [1];

PAR M. H. LAURENT.

VI. Nous allons maintenant aborder la théorie des équivalences de la forme

$$F(X) \equiv 0, \tag{1}$$

dans lesquelles F(X) est une fonction de X, et X un polynôme réduit à déterminer. Soit p le degré de F(X); il est facile de voir que l'équivalence (1) a plus de p solutions ou, si l'on veut, plus de p racines; en effet, la formule (1) peut se mettre sous la forme

$$A(X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_p) \equiv 0,$$

$a_1, a_2, \ldots$ désignant les racines de l'équation $F(X) = 0$; on peut satisfaire à cette équivalence en prenant

$$X_1 = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,$$

mais on peut y satisfaire encore de bien d'autres manières. Par exemple, soit U un polynôme réduit égal à a_1 pour $x_1 = \alpha_{11}$, $x_2 = \alpha_{21}$, ..., égal à a_2 pour $x_1 = \alpha_{12}$, $x_2 = \alpha_{22}$, ... Ce polynôme U sera déterminé par ces conditions et égal à

$$\sum a_i \frac{\Delta_i}{\Delta} = U.$$

---

[1] Voir même Tome, p. 432.

Il est clair alors que $X = U$ sera une solution de l'équivalence (1). Il sera, d'ailleurs, facile de former ainsi toutes les solutions de l'équivalence (1). On peut considérablement simplifier la théorie des équivalences algébriques au moyen du théorème suivant :

Théorème. — *Soit* X *une racine convenablement choisie de l'équivalence binôme*

(2) $$X^\mu - 1 \equiv 0.$$

Tout polynôme entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sera équivalent à une expression de la forme*

(3) $$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \ldots + A_{\mu-1} X^{\mu-1}.$$

Pour que cela ait lieu, il faut évidemment que X contienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mettons alors la formule (2) sous la forme

$$(X - j)(X - j^2)\ldots(X - j^\mu) \equiv 0.$$

j désignant l'expression $\cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\mu}$ ou toute autre racine primitive de $x^\mu - 1 = 0$. Nous pourrons prendre pour X un polynôme réduit prenant les valeurs $j, j^2, \ldots, j^\mu$ quand les x passent successivement par tous les systèmes de solutions des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$; par exemple, on pourra supposer

$$X = \sum j^i \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

La formule (3) pourra alors s'identifier avec un polynôme réduit quelconque augmenté, s'il le faut, de multiples de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. $A_0, A_1, \ldots$ seront alors déterminés au moyen d'équations du premier degré, et il faut prouver que, en général, le déterminant de ces équations ne sera pas nul.

Le déterminant en question ne dépend pas du poly-

nôme que l'on veut identifier avec l'expression (3), après l'avoir réduite ; il est clair que l'identification est possible avec certains polynômes, par exemple avec ceux qui sont le développement d'une expression (3) choisie à l'avance ; si donc on démontre qu'il n'y a qu'une seule manière de choisir les coefficients $A_0, A_1, \ldots$, le déterminant en question ne sera pas nul.

Or supposons que, f désignant un polynôme réduit, on puisse avoir à la fois

$$f \equiv A_0 + A_1 X + \ldots + A_{\mu-1} X^{\mu-1},$$
$$f \equiv B_0 + B_1 X + \ldots + B_{\mu-1} X^{\mu-1};$$

on en conclurait

$$0 \equiv (A_0 - B_0) + X(A_1 - B_1) + \ldots + X^{\mu-1}(A_{\mu-1} - B_{\mu-1});$$

si, dans cette formule, on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les divers systèmes de valeurs qui annulent les φ ou, ce qui revient au même, si l'on fait successivement $X = j$, $X = j^2, \ldots, X = j^\mu$, on trouve

$$A_0 - B_0 + j\,(A_1 - B_1) + \ldots + j^{\mu-1}\,(A_{\mu-1} - B_{\mu-1}) = 0,$$
$$A_0 - B_0 + j^2(A_1 - B_1) + \ldots + j^{2\mu-2}(A_{\mu-1} - B_{\mu-1}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on tire

$$A_0 = B_0, \qquad A_1 = B_1, \qquad \ldots,$$

car le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & j & j^2 & \ldots & j^{\mu-1} \\ 1 & j^2 & j^4 & \ldots & j^{2\mu-1} \\ . & .. & .. & \ldots & \ldots.. \end{vmatrix}$$

est égal au produit des différences des quantités $j, j^2, j^3, \ldots, j^\mu$ qui sont toutes distinctes, et, par suite, il n'est pas nul.

Ainsi *tout polynôme, à des multiples des diviseurs*

près, peut se mettre sous la forme

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \ldots + A_{\mu-1} X^{\mu-1}.$$

Cette forme est précieuse, en effet, en vertu de l'équivalence

$$X^{\mu} - 1 \equiv 0;$$

on pourra, dans le calcul, traiter la variable X comme si elle avait pour puissances successives $1, X, \ldots, X^{\mu-1}$, $1, X, \ldots, X^{\mu-1}$, $1, \ldots$, en sorte que, dans bien des cas, l'étude des équivalences algébriques pourra être ramenée à celle des équivalences relatives au diviseur unique $X^{\mu} - 1$.

Lorsque l'on a ramené un polynôme à la forme

$$A_0 + A_1 X + \ldots + A_{\mu-1} X^{\mu-1},$$

son module prend une forme remarquable : multiplions-le, en effet, par

$$B_0 + B_1 X + \ldots + B_{\mu-1} X^{\mu-1},$$

le résultat est

$$\begin{aligned} & A_0 B_0 + A_{\mu-1} B_1 + \ldots + A_1 B_1 \\ + & (A_1 B_0 \quad + A_0 B_1 \quad + \ldots + A_2 B_{\mu-1}) X \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & (A_{\mu-1} B_0 + A_{\mu-2} B_1 + \ldots + A_0 B_{\mu-1}) X^{\mu-1}. \end{aligned}$$

Le déterminant des équations obtenues en égalant les coefficients des diverses puissances de X à zéro, à savoir :

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A_0 & A_{\mu-1} & \ldots & A_1 \\ A_1 & A_0 & \ldots & A_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ A_{\mu-1} & A_{\mu-2} & \ldots & A_0 \end{vmatrix} = M,$$

est le module cherché, ce qui montre que :

La résultante de plusieurs équations peut se mettre sous la forme d'un déterminant cyclique.

Considérons le déterminant (4) et désignons par j une racine primitive $\mu^{\text{ième}}$ de l'unité. Ce déterminant pourra se mettre sous la forme

$$(5)\qquad F(j)\,F(j^2)\ldots F(j^\mu),$$

$F(x)$ désignant, pour abréger, le polynôme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{\mu-1} x^{\mu-1}.$$

Pour effectuer le produit (5), on peut opérer comme si j était une quantité quelconque et faire usage des formules de réduction

$$j^\mu = 1, \qquad j^{\mu+1} = j, \qquad \ldots, \qquad j^{2\mu} = 1, \qquad j^{2\mu+1} = j, \qquad \ldots;$$

on peut aussi le former en calculant le produit

$$F(X)\,F(X^2)\ldots F(X^\mu)$$

et en faisant usage de l'équivalence $X^\mu - 1 \equiv 0$, pour éliminer les puissances de X supérieures à $\mu - 1$. On peut donc écrire

$$M \equiv F(X)\,F(X^2)\ldots F(X^\mu).$$

Les polynômes $F(X)$, $F(X^2)$, …, $F(X^\mu)$ *sont ce que l'on peut appeler des expressions réduites conjuguées; de pareilles expressions ont toutes le même module, leur produit est égal à leur module commun.*

NOTE GÉOMÉTRIQUE;

Par M. Geminiano PIRONDINI.

Soient h une ligne plane quelconque, h_1 sa développée, h_2 la développée de h_1, h_3 la développée de h_2, etc.; désignons par s, s_1, s_2, s_3, … les arcs, par $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$,

$d\varepsilon_3, \ldots$ les angles de contingence, par $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ les rayons de courbure de ces lignes; on aura

$$ds_1 = d\rho, \quad ds_2 = d\rho_1, \quad ds_3 = d\rho_2, \quad \ldots;$$
$$d\varepsilon = d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = \ldots;$$
$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1} = \frac{d\rho}{d\varepsilon} = d\rho : \frac{ds}{\rho} = \rho\frac{d\rho}{ds},$$
$$\rho_2 = \rho_1\frac{d\rho_1}{ds_1} = \rho\frac{d\rho}{ds}\,\frac{d\rho_1}{d\rho} = \rho\frac{d\rho_1}{ds},$$
$$\rho_3 = \rho_2\frac{d\rho_2}{ds_2} = \rho\frac{d\rho_1}{ds}\,\frac{d\rho_2}{d\rho_1} = \rho\frac{d\rho_2}{ds},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, si les lignes h, h_1 sont identiques et si le rayon ρ s'exprime en fonction de l'arc s, comme il suit

$$\rho = \varphi(s),$$

nous aurons

$$\rho_1 = \varphi(s_1).$$

Par conséquent,

$$\varphi(s_1) = \rho\frac{d\rho}{ds} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds};$$

mais

$$s_1 = \rho - \mathrm{K} = \varphi(s) - \mathrm{K} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.});$$

donc

$$(1) \qquad \varphi[\varphi(s) - \mathrm{K}] = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds},$$

où le premier membre indique le résultat de la substitution de la fonction $\varphi(s) - \mathrm{K}$ à la variable s dans la fonction $\varphi(s)$.

Réciproquement, si la fonction $\varphi(s)$ de l'arc s, exprimant le rayon de courbure d'une ligne h, vérifie l'équation (1), nous aurons, pour le rayon de courbure ρ_1 de h_1,

$$\rho_1 = \rho\frac{d\rho}{ds} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} = \varphi[\varphi(s) - \mathrm{K}] = \varphi(\rho - \mathrm{K}) = \varphi(s_1),$$

c'est-à-dire que le rayon ρ_1 s'exprime en fonction de s_1

précisément comme ρ s'exprime en fonction de s; par conséquent, les lignes h, h_1 sont identiques.

On a donc le théorème :

Pour qu'une ligne plane h et sa développée h_1 soient identiques, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(s)$ de l'arc exprimant le rayon de courbure de h vérifie l'équation (1).

Si la ligne h et sa seconde développée h_2 sont identiques, le rayon ρ_2 doit s'exprimer par s_2 précisément comme ρ s'exprime par s, c'est-à-dire

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_2 = \varphi(s_2).$$

Or on a

$$\rho_2 = \frac{d\rho_1}{ds}\rho = \rho\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{d\rho}{ds}\right) = \varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right]$$

et, d'ailleurs,

$$s_2 = \rho_1 - \mathrm{K} = \rho\frac{d\rho}{ds} - \mathrm{K} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \mathrm{K}.$$

Donc :

Pour qu'une ligne plane h et sa seconde développée h_2 soient identiques, il est nécessaire et suffisant que la fonction $\varphi(s)$ de l'arc s, exprimant le rayon de courbure de h, vérifie l'équation

$$\varphi\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \mathrm{K}\right] = \varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right].$$

Si h est identique à sa troisième développée, la fonction $\varphi(s)$ doit vérifier l'équation

$$\varphi\left\{\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right] - \mathrm{K}\right\}$$
$$= \varphi(s)\frac{d}{ds}\left\{\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right]\right\}$$

. . . .

Avec un procédé analogue, on peut trouver aisément l'équation qui doit être vérifiée par la fonction $\varphi(s)$ pour que la $n^{\text{ième}}$ développée de h soit identique à la ligne primitive. Le premier membre de cette équation, si $\varphi(s)$ est une fonction algébrique de s du degré m, est du degré

$$(nm - n + 1)m,$$

tandis que le second membre est du degré

$$(n + 1)m - n.$$

On doit donc avoir

$$(nm - n + 1)m = (n + 1)m - n,$$

c'est-à-dire

$$n(m - 1)^2 = 0$$

ou bien

$$m = 1.$$

Donc :

Pour qu'une ligne plane h, dont le rayon de courbure est une fonction $\varphi(s)$ algébrique de l'arc s, soit identique à une de ses développées, il est nécessaire que $\varphi(s)$ ait une des formes suivantes

$$\varphi(s) = as + b,$$

où a et b sont des constantes;

$$\varphi(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

où $P(s)$, $Q(s)$ *sont des polynômes du degré n, $n - 1$ respectivement;*

$$\varphi(s) = \sqrt[n]{R(s)},$$

où $R(s)$ *est un polynôme du degré $n - 1$.*

Si

$$\varphi(s) = as + b.$$

on a

$$\varphi[\varphi(s) - K] = a(as + b) - aK + b,$$

$$\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} = a(as + b),$$

et l'on rend toujours égales ces expressions en prenant $K = \frac{b}{a}$; mais, parmi les lignes planes, les spirales logarithmiques seules ont leur rayon de courbure exprimable par une fonction linéaire de l'arc.

Donc :

Entre les lignes planes dont le rayon de courbure est exprimable par une fonction algébrique entière de l'arc, les spirales logarithmiques seules ont pour développées des lignes identiques aux primitives.

Il est clair, d'ailleurs, que toute spirale logarithmique jouit de cette propriété, puisque la développée d'une spirale logarithmique h est une nouvelle spirale logarithmique h_1 dont l'inclinaison i_1 sur les rayons vecteurs est la même que l'inclinaison i de h sur ses rayons vecteurs; conséquemment h, h_1 sont identiques.

Si

$$\varphi(s) = \sqrt{a + bs + cs^2},$$

la condition (1) devient

$$\sqrt{a + b\left(\sqrt{a + bs + cs^2} - K\right) + c\left(\sqrt{a + bs + cs^2} - K\right)^2} = \frac{b + 2cs}{2},$$

c'est-à-dire

$$4cK^2 - 4bK + 4a + 4ac - b^2 + 4(b - 2cK)\sqrt{a + bs + cs^2} = 0.$$

Cette équation se dédouble comme il suit

$$b - 2cK = 0, \qquad 4cK^2 - 4bK + 4a + 4ac - b^2 = 0.$$

La première nous donne $K = \frac{b}{2c}$, et, si l'on porte cette

valeur dans la seconde égalité, celle-ci devient

$$(1+c)(4ac-b^2)=0.$$

La condition $4ac-b^2=0$ exprime que le trinôme $a+bs+cs^2$ est un carré parfait, et l'on revient ainsi au cas de la spirale logarithmique. L'autre condition $1+c=0$ nous offre

$$\varphi(s)=\sqrt{a+bs-s^2}.$$

Je dis alors que la ligne h est une cycloïde. En effet, lorsque le rayon du cercle générateur de la cycloïde est R et que les axes coordonnés sont la tangente au sommet et l'axe de la ligne, on a

$$\rho=2\sqrt{4R^2-2Rx}, \qquad s=2\sqrt{2Rx},$$

le sommet étant l'origine des arcs s.

Si l'on élimine x entre les deux égalités précédentes, on aura

$$\rho=\sqrt{16R^2-s^2}.$$

Prenons pour origine des arcs s le point P de la courbe, tel que l'arc compris entre P et le sommet soit d'une longueur h; on obtient alors de la précédente

$$\rho=\sqrt{16R^2-h^2+2hs-s^2}.$$

On voit donc que la fonction

$$\rho=\varphi(s)=\sqrt{a+bs-s^2}$$

correspond effectivement à une cycloïde dont le rayon du cercle générateur est $\frac{1}{8}\sqrt{4a+b^2}$; le point de la ligne, d'où l'on compte les arcs s, est à la distance $\frac{b}{2}$ du sommet.

On a donc le théorème :

Entre les lignes planes dont le rayon de courbure

est exprimable par une fonction de s de la forme $\sqrt{a+bs+cs^2}$, *la cycloïde seule a pour développée une ligne identique à la primitive.*

Toute cycloïde a cette propriété.

On peut considérer une ligne courbe comme la limite d'une ligne polygonale dont le nombre des côtés augmente indéfiniment; pour que deux lignes courbes h, h_1 soient semblables, il est donc nécessaire et suffisant que, entre les arcs élémentaires ds, ds_1 et les angles de contingence $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$ des deux lignes, subsistent les relations

$$ds = k\,ds, \qquad d\varepsilon = d\varepsilon_1$$

(k étant le rapport de similitude), ou bien les autres

$$\rho = k\rho_1, \qquad s = ks_1.$$

Supposons que les rayons de courbure ρ, ρ_1 s'expriment en fonction de s et de s_1, comme il suit :

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_1 = \psi(s_1).$$

Si, dans la fonction $\psi(s_1)$, on change s_1 en $\frac{s}{k}$, on doit obtenir $\frac{1}{k}\rho$, c'est-à-dire $\frac{1}{k}\varphi(s)$, quel que soit s_1; cette condition est remplie lorsque

$$\psi(s_1) = \frac{1}{k}\varphi(ks_1).$$

Réciproquement, si

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_1 = \frac{1}{k}\varphi(ks_1)$$

sont les rayons de courbure des lignes h, h_1, il est évident que, pour $s = a$, $s_1 = \frac{a}{k}$, on obtient

$$\rho = \varphi(a), \qquad \rho_1 = \frac{1}{k}\varphi(a) = \frac{1}{k}\rho,$$

ce qui prouve que les lignes h, h_1 sont semblables.

Donc :

Pour que deux lignes h, h_1 soient semblables, il faut et il suffit que les rayons de courbure ρ, ρ_1 s'expriment en fonction des arcs s, s_1 de ces lignes, comme il suit :

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_1 = \frac{1}{k}\varphi(ks_1).$$

Si h est une spirale logarithmique,

$$\rho = as + b,$$

et nous aurons, pour le rayon ρ_1 d'une ligne h_1 semblable à h,

$$\rho_1 = \frac{1}{k}(mks_1 + n) = ms_1 + \frac{n}{k}.$$

La ligne h_1 est donc une spirale égale à la primitive, puisque les deux lignes h, h_1 ont la même inclinaison sur leurs rayons vecteurs.

Soient h, h_1 deux cycloïdes engendrées par des cercles de rayons R, R_1 ; prenons pour origine des arcs s, s_1 deux points P, P_1, tels que les arcs h, h_1 des lignes compris entre ces points et les sommets respectifs soient proportionnels aux rayons R, R_1. Alors

$$R_1 = \frac{R}{k}, \qquad h_1 = \frac{h}{k},$$

$$\rho = \sqrt{16R^2 - h^2 + 2hs - s^2},$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{16R^2 - h^2}{k^2} + \frac{2h}{k}s_1 - s_1^2}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt{16R^2 - h^2 + 2h.ks_1 - (ks_1)^2}.$$

La condition de similitude est donc vérifiée.

Par conséquent :

Deux cycloïdes quelconques sont toujours semblables,

et le rapport de similitude est égal au rapport des rayons des cercles générateurs.

Si la ligne h_1 est la développée de h, la condition de similitude entre h, h_1 devient

$$\frac{1}{m}\varphi(ms_1) = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds};$$

mais

$$s_1 = \rho - \text{K},$$

donc

$$\varphi\{m[\varphi(s) - \text{K}]\} = m\,\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}$$

ou bien

$$(2)\qquad \varphi[m\,\varphi(s) - n] = m\,\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}.$$

Pour que la développée d'une ligne h soit une ligne h_1 semblable à la primitive, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(s)$ de l'arc exprimant le rayon de courbure de h vérifie la relation (2).

Si h est semblable à la seconde développée h_2, on a

$$\varphi(ms_2) = m\,\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right];$$

mais

$$s_2 = \rho_1 - \text{K} = \rho\frac{d\rho}{ds} - \text{K} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \text{K};$$

la fonction $\varphi(s)$ doit donc vérifier la relation

$$\varphi\left\{m\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \text{K}\right]\right\} = m\,\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right]$$

ou bien l'autre

$$\varphi\left[m\,\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - n\right] = m\,\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right].$$

On trouverait pareillement les conditions pour que la

ligne primitive h soit semblable à la troisième, à la quatrième, ... développée.

Si h_1 est la ligne enveloppée par les droites qui font le même angle θ avec les tangentes d'une ligne plane h, les coordonnées x_1, y_1 d'un point quelconque A_1 de h_1 sont liées aux coordonnées x, y du point correspondant A de h par les équations suivantes

$$x_1 = x + \rho(\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \cos\lambda)\sin\theta,$$
$$y_1 = y + \rho(\cos\theta \cos\beta + \sin\theta \cos\mu)\sin\theta,$$

où ρ est le rayon de courbure de h, $\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\lambda, \cos\mu$ sont les cosinus directeurs de la tangente et de la normale principale de h. Si s, s_1 sont les arcs de h, h_1, on déduit des égalités précédentes (en appliquant aussi les formules connues de J.-A. Serret)

$$\frac{dx_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\lambda),$$
$$\frac{dy_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\cos\mu);$$

d'où l'on tire

$$ds_1 = \left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)ds$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\lambda,$$
$$\frac{dy_1}{ds_1} = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\cos\mu.$$

Puisque ces égalités nous offrent

$$\frac{d^2x_1}{ds_1^2} = \frac{\cos\theta\cos\lambda - \sin\theta\cos\alpha}{\rho\left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)},$$
$$\frac{d^2y_1}{ds_1^2} = \frac{\cos\theta\cos\mu - \sin\theta\cos\beta}{\rho\left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)},$$

le rayon de courbure ρ_1 de h_1 aura pour expression

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2 x_1}{ds_1^2}\right)^2}} = \rho\left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right).$$

La ligne h_1 sera donc semblable à la ligne h lorsque la fonction $\varphi(s)$ de l'arc s, exprimant le rayon de courbure de h, vérifiera l'équation

$$\varphi\{m[s\cos\theta + \varphi(s)\sin\theta - \mathrm{K}]\} = m\left[\cos\theta - \frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\theta\right]\varphi(s).$$

Les lignes h, h_1 seront égales lorsqu'on aura

$$\varphi[s\cos\theta + \varphi(s)\sin\theta - \mathrm{K}] = \left[\cos\theta + \frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\theta\right]\varphi(s).$$

Si, par exemple, h est une spirale logarithmique,

$$\rho = as + b;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}&\varphi[s\cos\theta + \varphi(s)\sin\theta - \mathrm{K}]\\ &\quad = a(\cos\theta + a\sin\theta)s + a(b\sin\theta - \mathrm{K}) + b,\end{aligned}$$

$$\cos\theta + \frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\theta = a(\cos\theta + a\sin\theta)s + b(\cos\theta + a\sin\theta).$$

La condition d'égalité des courbes h, h_1 devient

$$a(b\sin\theta - \mathrm{K}) + b = b(\cos\theta + a\sin\theta),$$

que l'on peut toujours vérifier en prenant

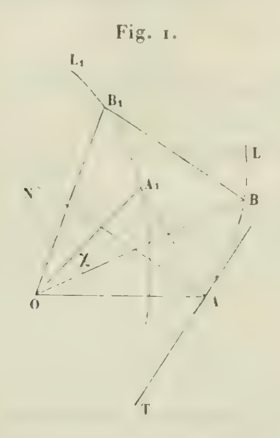
$$\mathrm{K} = \frac{b(1 - \cos\theta)}{a}.$$

Si donc la ligne h est une spirale logarithmique, la ligne h_1, enveloppée par les droites qui font un angle constant avec les tangentes de h, est une nouvelle spirale identique à la primitive.

Les spirales logarithmiques égales h, h_1 ont le même

pôle O; on obtient donc h_1 dans sa position en faisant tourner h d'un certain angle convenable χ autour de O. Nous allons déterminer cet angle χ.

Fig. 1.



Si l'on désigne par i l'inclinaison constante des lignes h, h_1 sur leurs rayons vecteurs, on a

$$\rho = as - b = s \cot i + b.$$

Soient (A, A_1), (B, B_1) deux couples de points correspondants sur les lignes h, h_1; si l'on suppose B choisi, de manière que

$$BB_1 = AA_1 \frac{\sin(i+\theta)}{\sin i},$$

on obtient, pour le rayon de courbure $(\rho_1)_{A_1}$ de h_1 au point A_1,

$$(\rho_1)_{A_1} = (\cos\theta + \sin\theta \cot i)\rho_A = AA_1 \frac{\sin(i+\theta)}{\sin i}.$$

Les rayons de courbure des lignes h, h_1 en B et A_1 sont donc égaux; par conséquent, B et A_1 sont, sur les lignes égales h, h_1, correspondants; on aura donc

$$\chi = \widehat{BOA_1}.$$

Si ω_1, ω_2 sont les angles polaires relatifs aux points A, B de h, et si R_0 est le rayon vecteur initial, on a

$$OA = R_0 e^{\omega_1 \cot i}, \qquad OB = R_0 e^{\omega_2 \cot i},$$

d'où l'on tire

$$\frac{OB}{OA} = e^{(\omega_2 - \omega_1)\cot i} = e^{\widehat{AOB}\cot i}.$$

Je dis que les triangles OAA_1, OBB_1, ... sont semblables; en effet, dans le triangle OAA_1, l'angle $\widehat{OA_1A}$ est l'inclinaison de la spirale h_1 sur ses rayons vecteurs; donc

$$\widehat{OA_1A} = i.$$

Pour évaluer l'angle $\widehat{OAA_1}$, conduisons la normale AN et la tangente AT à la ligne h; nous aurons

$$\widehat{A_1AN} = \widehat{A_1AT} - \widehat{NAT} = \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\widehat{NAO} = \widehat{NAT} - \widehat{OAT} = \frac{\pi}{2} - i,$$

d'où

$$\widehat{A_1AO} = \widehat{A_1AN} + \widehat{NAO} = \theta - i.$$

Le triangle OAA_1 reste donc toujours semblable à soi-même lorsque les points correspondants A, A_1 se déplacent sur les lignes respectives. Par conséquent,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BB_1}{AA_1} = \frac{\sin(i+\theta)}{\sin i},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin(i+\theta)}{\sin i} = e^{\widehat{AOB}\cot i},$$

d'où

$$\widehat{AOB} = \operatorname{tang} i\left[\log\frac{\sin(i+\theta)}{\sin i}\right].$$

Dans le triangle AOA_1, on a, pour le troisième

angle $\widehat{AOA_1}$,

$$\widehat{AOA_1} = \pi - \left(\widehat{OAA_1} + \widehat{OA_1A}\right) = \pi - \theta;$$

donc

$$\begin{aligned}\chi = \widehat{BOA_1} &= \widehat{AOA_1} - \widehat{AOB}\\ &= \pi - \theta - \left[\log \frac{\sin(i+\theta)}{\sin i}\right] \operatorname{tang} i.\end{aligned}$$

On a ainsi le théorème :

On obtient la spirale logarithmique h_1 dans sa position, en faisant tourner la spirale h autour de son pôle, et dans la direction des rayons vecteurs croissants, d'un angle

$$\chi = \pi - \theta + \left[\log \frac{\sin i}{\sin(i+\theta)}\right] \operatorname{tang} i.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, la ligne h_1 est la développée de h, et l'angle χ est alors déterminé par l'égalité

$$\chi = \frac{\pi}{2} + (\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i.$$

Lorsque $i = 45°$, χ est un angle droit.

Si l'angle i vérifie la relation

$$\frac{\pi}{2} + (\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i = 0,$$

la développée h_1 de la spirale h est la spirale même. En faisant alors rouler, sans glissement, le plan de la courbe sur une surface développable quelconque, on obtient une surface moulure de Monge, qui contient tous les centres de courbure d'un système. Une telle surface a été mentionnée par Binet (*Journal de Liouville*, 1re série, t. VI).

Si h_1 est la développée d'une spirale logarithmique, h_2 celle de h_1, h_3 celle de h_2, ..., on obtient les lignes

égales h, h_1, h_2, h_3, ... par des rotations de h autour de son pôle. Lorsque l'angle i vérifie la relation

$$a\left[\frac{\pi}{2} + (\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i\right] = 2b\pi$$

ou bien l'autre

$$(\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i = \frac{4b - a}{2a}\pi,$$

a et b étant des nombres entiers, les lignes h, h_1, h_2, ... forment un système fermé, composé de a spirales logarithmiques égales entre elles; une ligne quelconque h_n du système a pour développée la ligne successive h_{n+1}, la dernière ligne a pour développée la primitive h. Si l'on fait rouler, sans glissement, le plan des lignes sur une surface développable quelconque, chaque spirale engendre une surface moulure de Monge. On obtient donc un système fermé, composé de a surfaces moulures, dont chacune a pour une de ses développées la surface moulure suivante.

Soit h_1 une ligne parallèle à la ligne h; si h est la distance constante entre deux points correspondants de h, h_1, et que (ρ, s), (ρ_1, s_1) sont le rayon de courbure et l'arc de h, h_1, nous aurons

$$\rho_1 = \rho + h, \qquad ds_1 = ds + h\frac{ds}{\rho},$$

d'où l'on tire

$$s_1 = \mathrm{K} + s + h\int\frac{ds}{\rho} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.}).$$

Si $\rho = \varphi(s)$, la ligne h_1 sera égale à la ligne h lorsque $\rho_1 = \varphi(s_1)$, c'est-à-dire lorsque la fonction $\varphi(s)$, exprimant le rayon de courbure de h vérifie l'équation

$$h + \varphi(s) = \varphi\left[\mathrm{K} + s + h\int\frac{ds}{\varphi(s)}\right].$$

Exemple. — Si l'on suppose

$$\varphi(s) = \sqrt{as + b},$$

on a

$$h + \varphi(s) = h + \sqrt{as + b},$$

$$\varphi\left[K + s + h\int \frac{ds}{\varphi(s)}\right] = \sqrt{a\left(K + s + \frac{2h}{a}\sqrt{as + b}\right) + b}.$$

La condition d'égalité des lignes h, h_1 devient alors

$$h^2 + as + b + 2h\sqrt{as + b} = a\left(K + s + \frac{2h}{a}\sqrt{as + b}\right) + b,$$

qu'on peut toujours vérifier, quelle que soit h, en prenant

$$K = \frac{h^2}{a}.$$

On conclut que la ligne, dans laquelle $\rho = \sqrt{as + b}$, est identique à toutes ses parallèles.

On voit aisément que la ligne h est une développante d'un cercle de rayon $\frac{a}{2}$; en effet, la relation $\rho_1 = \rho\frac{d\rho}{ds}$ entre le rayon de courbure ρ d'une ligne et le rayon de courbure ρ_1 de sa développée nous donne

$$\rho_1 = \frac{a}{2}.$$

Une ligne sphérique est complètement déterminée lorsque son rayon de courbure géodésique R est donné en fonction de l'arc s. En effet, entre le rayon de courbure géodésique R et le rayon de courbure absolue ρ d'une ligne placée sur une sphère de rayon h subsiste la relation

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

D'ailleurs, si r est le rayon de torsion de la ligne sphé-

rique, on a aussi

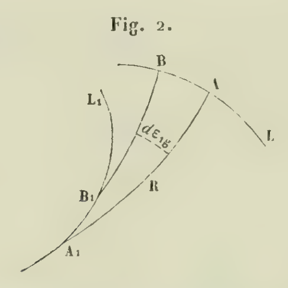
$$h^2 = \rho^2 + r^2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{\sqrt{h^2 - \rho^2}}{\frac{d\rho}{ds}}.$$

Si donc R est une fonction connue de l'arc s, on aura

Fig. 2.



aussi ρ et r en fonction de s; par conséquent, la ligne est complètement déterminée.

Comment le rayon de courbure géodésique R d'une ligne sphérique h doit-il être exprimé en fonction de l'arc s, pour que la développée sphérique h_1 de h soit identique à la ligne primitive?

Nous allons résoudre cette question.

Considérons deux points consécutifs A, B de h, et soient A_1, B_1 les correspondants de h_1 ; les arcs de grand cercle AA_1, BB_1 forment entre eux un angle infinitésimal, l'angle de contingence géodésique $d\varepsilon_{1g}$ de h_1 en A_1. Or on a

$$AB = h \sin\left(\frac{AA_1}{h}\right) d\varepsilon_{1g},$$

ou bien

$$ds = h \sin\left(\frac{R}{h}\right) d\varepsilon_{1g};$$

d'ailleurs,

$$ds_1 = dR.$$

Le rayon de courbure géodésique R_1 de h_1 est donc déterminé par la formule

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_{1g}} = h\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right).$$

Si

$$R = \varphi(s),$$

pour que h_1 soit identique à h, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition

$$R_1 = \varphi(s_1)$$

ou bien l'autre

$$\varphi(s_1) = h\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right];$$

mais

$$s_1 = R - K = \varphi(s) - K,$$

donc

$$\varphi[\varphi(s) - K] = h\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right], \tag{3}$$

c'est-à-dire :

La condition nécessaire et suffisante, pour que la développée sphérique d'une ligne placée sur une sphère de rayon h soit identique à la ligne primitive, est que la fonction $\varphi(s)$ *de l'arc, exprimant le rayon de courbure géodésique de la ligne, vérifie la relation* (3).

On peut aisément établir la condition pour que h soit identique à la seconde développée sphérique; en effet, on a

$$R_2 = h\frac{dR_1}{ds_1}\sin\left(\frac{R_1}{h}\right)$$
$$= h^2\frac{d\left[\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right)\right]}{dR}\sin\left[\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right)\right].$$

Le premier membre R_2 doit être formé par s_2 comme R

l'est par s; conséquemment, si $R = \varphi(s)$,

$$R_2 = \varphi(s_2) = \varphi(R_1 - K) = \varphi\left[h\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right) - K\right].$$

La condition demandée est donc la suivante :

$$\varphi\left\{h\frac{d\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right] - K\right\}$$
$$= h^2\frac{d\left\{\frac{d\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right]\right\}}{dR}\sin\left\{\frac{d\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right]\right\}.$$

On pourrait trouver aisément la condition qui doit être remplie par la fonction $\varphi(s)$ pour que la ligne sphérique h soit égale à la troisième, à la quatrième, ... développée sphérique.

Je vais enfin démontrer un théorème constituant une généralisation du théorème bien connu de Joachimsthal sur les lignes de courbure planes d'une surface.

Soient u, v les paramètres des lignes de courbure d'une surface quelconque S, et soit S_1 la développée de S par rapport aux lignes $u =$ const. Sur la surface S_1 les lignes $u =$ const. sont des géodésiques, et les tangentes aux courbes $v =$ const. le long d'une même ligne h_1 du système $u =$ const. forment la surface développable polaire Σ de la ligne correspondante h de S. Désignons par ω l'angle formé par les courbes u, v sur la surface S_1 et par φ l'angle que la binormale de h forme avec la normale à la surface S au même point; nous aurons

$$\omega = \varphi;$$

d'où l'on tire, en désignant par s l'arc de h,

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}du = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du = \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds.$$

Or $\frac{\partial\omega}{\partial u}du$ étant l'angle formé par deux génératrices con-

sécutives de Σ, c'est-à-dire l'angle de contingence de l'arète de rebroussement de Σ, est aussi l'angle de torsion $\frac{ds}{T}$ de h. On a donc

$$\frac{ds}{T} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds;$$

d'où

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

Soit, réciproquement, h une telle ligne d'une surface S, que, entre l'angle φ formé par la binormale de h avec la normale à S au même point, subsiste la relation précédente. Je dis alors que h est, sur la surface S, une ligne de courbure.

En effet, soit S_0 une surface dont h est une de ses lignes de courbure; si l'on désigne par φ_0 l'angle que la binormale de h forme avec la normale de S_0, on aura

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial s}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

d'où l'on tire

$$\varphi_0 - \varphi = \text{const.}$$

Cette égalité démontre que les normales à la surface S le long de h forment une surface développable; h est donc une ligne de courbure de S.

On a donc le théorème :

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une ligne h d'une surface soit ligne de courbure, est que la différentielle de l'angle que la binormale de h forme avec la normale à la surface soit égal à l'angle de torsion de h.

Lorsque h est plane,

$$\frac{1}{T} = 0,$$

et l'on obtient le théorème de Joachimsthal.

Si l'on suppose que la torsion de h soit constante, on aura

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T} = a,$$

d'où

$$\varphi = as + b.$$

L'angle φ est donc une fonction linéaire de l'arc de la ligne.

Le théorème précédent peut être énoncé comme il suit :

Si l'on fait tourner les binormales d'une ligne à double courbure dans les plans normaux, autour des points de la courbe, d'un angle dont la différentielle soit égale à l'angle de torsion de la ligne, on obtient une surface développable.

NOTE SUR L'HYPERBOLOÏDE;

Par M. MANGEOT,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Troyes.

On peut déduire de la théorie des invariants quelques propriétés des génératrices de l'hyperboloïde à une nappe.

Concevons que l'on construise un parallélépipède P sur trois génératrices quelconques de même système, en faisant passer par chacune d'elles un plan parallèle aux deux autres. Appelons 2α, 2β, 2γ les longueurs de ses arêtes, et S, S' ses deux sommets non situés sur l'hyper-

boloïde. Menons par le centre O de la surface les parallèles Ox, Oy, Oz aux trois génératrices considérées, dans des directions telles que le trièdre $Oxyz$ comprenne dans son intérieur l'un des points S, S'.

L'hyperboloïde est représenté par l'équation

$$\frac{yz}{\beta\gamma} + \frac{zx}{\gamma\alpha} + \frac{xy}{\alpha\beta} + 1 = 0$$

relativement aux axes Ox, Oy, Oz, et par l'équation

$$-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0$$

relativement à ses axes de symétrie.

En appliquant les théorèmes sur les invariants à ces deux équations, on obtient les relations

$$(1) \qquad \alpha\beta\gamma\sqrt{D} = \tfrac{1}{2}abc,$$

$$(2) \qquad 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \rho^2 = a^2 - b^2 - c^2,$$

$$(3) \qquad \Sigma 2\alpha(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu) = abc\sqrt{D}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$

où l'on a posé

$$\lambda = \widehat{yOz}, \qquad \mu = \widehat{zOx}, \qquad \nu = \widehat{xOy},$$

$$D = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu.$$

La relation (1) exprime que le volume du parallélépipède P, construit sur trois génératrices quelconques de l'hyperboloïde, est constant et égal à la moitié du volume du parallélépipède construit sur ses axes $2a$, $2b$, $2c$.

La formule (2) traduit cette propriété des hexagones gauches, à côtés opposés parallèles, que l'on peut placer sur l'hyperboloïde :

La somme des carrés des six côtés de l'hexagone, diminuée du carré de la distance SS' des deux points où

concourent les plans de ses six angles, est constante et égale à la somme algébrique des carrés des axes de l'hyperboloïde.

Quant à la relation (3), dans laquelle le coefficient $\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu$ de 2α représente la projection sur Oy (ou sur Oz) d'une longueur que l'on sait construire ([1]), elle peut s'interpréter de la manière suivante :

Soient SA, SB, SC les trois arêtes du parallélépipède P qui partent d'un sommet S non situé sur l'hyperboloïde. Dans le plan ASB de deux arêtes, menons à l'une d'elles, SA, une perpendiculaire ST_a dirigée du même côté que la seconde arête SB, et prenons sur cette perpendiculaire une longueur ST_a égale à la distance du sommet A à la droite SB; puis projetons cette longueur ST_a sur la troisième arête SC. Cette projection, ajoutée aux deux projections analogues relatives aux points B, C, donne une somme qui est proportionnelle au volume du parallélépipède construit sur les droites SA, SB, SC, avec des longueurs d'arêtes égales à a, b, c. Le coefficient de proportionnalité est

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

Examinons deux cas particuliers:

1°
$$\lambda = \mu = \frac{\pi}{2}.$$

Les relations (2) et (3) deviennent

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\nu) + \gamma^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$2\gamma = \operatorname{tang}\nu\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{ab}{c}\right).$$

([1]) Se reporter à la démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

La première de ces deux formules montre que la diagonale (autre que SS′) du parallélépipède droit, construit avec trois génératrices d'un hyperboloïde dont deux soient perpendiculaires sur la troisième, a une longueur constante et égale à $2\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, ou bien encore que les points de la surface par lesquels passent deux génératrices rectangulaires sont sur une sphère concentrique dont le rayon est $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. C'est le corollaire bien connu du théorème de Monge.

La seconde formule signifie que la longueur de la corde interceptée par la sphère de Monge sur une génératrice de l'hyperboloïde est proportionnelle à la tangente de l'angle des deux autres génératrices qui passent par les extrémités de cette corde.

2°
$$\lambda = \mu = \nu = \frac{\pi}{2}.$$

L'hyperboloïde est alors équilatéral.

En divisant la relation (2) par le carré de la formule (1), on obtient

$$\frac{1}{\beta^2\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \frac{4}{b^2c^2} - \frac{4}{c^2a^2} - \frac{4}{a^2b^2}.$$

On voit que, si l'on construit un parallélépipède sur trois génératrices rectangulaires deux à deux d'un hyperboloïde équilatéral, la somme des carrés des inverses de ses faces est constante.

SUR UN PROBLÈME DE POTENTIEL;

Par M. J.-B. POMEY.

Lemme. — *Étant donnés deux cercles de diamètres* PO *et* PO′, *par le point* P *qui est l'un des points où ces*

cercles se coupent, je mène une sécante quelconque PCC′, *qui rencontre en* C *et* C′ *les deux cercles. Sur elle, je porte* PD *égal à la somme de* PC *et de* PC′. *Lorsque la sécante tourne autour du point* P, *le point* D *décrit un cercle qui a pour diamètre* PΩ, *le point* Ω *étant obtenu comme extrémité d'une droite égale et parallèle à* PO *menée par le point* O′.

Si, en effet, C, C′ et D sont les projections sur la sécante des points O, O′ et Ω, les points C et C′ sont sur les cercles de diamètres PO et PO′, et l'on a PC = C′D comme projections sur une même droite de deux longueurs égales et parallèles. Alors on a

$$PC + PC' = PD.$$

Le point D étant la projection, sur une droite qui tourne autour de P, d'un point fixe Ω, décrit le cercle qui a pour diamètres PΩ.

On dit que PΩ est la somme géométrique de PO et de PO′. Si l'on avait porté $O'\Omega_1$ égal à O′Ω en sens directement opposé, $P\Omega_1$ aurait été la différence géométrique, et, si j'appelle E la projection de Ω_1 sur la sécante, j'aurai PC′ — PC = PE. Ce point E a pour lieu un cercle décrit sur $P\Omega_1$ comme diamètre. Dans ce qui suit, nous conservons les mêmes notations.

Cela posé, on donne le point fixe P et deux cercles de rayons R et R′ décrits autour de O et de O′ comme centres, il s'agit de mener par P une sécante telle que l'on ait

$$(1)\qquad \overline{PC}^2 - \overline{PC'}^2 = \left(\overline{PO}^2 - R^2\right) - (PO'^2 - R'^2).$$

Interprétons d'abord cette équation. Supposons que les segments interceptés sur la sécante par les cercles O et O′ soient réels : soit 2λ le segment intercepté par la sécante dans le cercle de centre O et de rayon R; en

égalant deux expressions de la puissance du point P par rapport au cercle O, on aura

$$(2) \qquad \overline{PO}^2 - R^2 = \overline{PC}^2 - \lambda^2,$$

et, dans le second cercle, on aurait de même

$$(3) \qquad \overline{PO'}^2 - R'^2 = \overline{PC'}^2 - \mu^2,$$

2μ étant le segment intercepté sur la sécante par le cercle de rayon R'; on en déduira que 2μ et 2λ sont égaux, eu égard à l'équation (1). C'est ce qu'elle exprime.

Ainsi l'on demande de mener une sécante sur laquelle les deux cercles interceptent des segments égaux.

Supposons maintenant que ces segments soient imaginaires, et soient t, t' les longueurs des tangentes menées du point P aux cercles O et O'. Avec ces tangentes, que je supposerai réelles, comme rayons, je décris autour du point P comme centre deux cercles (t) et (t'), lesquels interceptent sur OC et sur OC' respectivement deux segments $2\lambda'$ et $2\mu'$. Nous aurons, en égalant, comme précédemment, deux expressions de la puissance des points O et O' par rapport à ces cercles,

$$(4) \qquad \overline{PO}^2 - t^2 = \overline{OC}^2 - \lambda'^2,$$

$$(5) \qquad \overline{PO'}^2 - t'^2 = \overline{OC'}^2 - \mu'^2;$$

mais on a, en ajoutant membre à membre les équations (2) et (4),

$$2\overline{OP}^2 - R^2 - t^2 = \overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 - (\lambda^2 + \lambda'^2).$$

Or on a

$$\overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PO}^2$$

et

$$t^2 = \overline{OP}^2 - R^2,$$

car POC est un triangle rectangle, et de même t, R et OP forment un triangle qui est aussi rectangle.

Il reste donc

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = 0.$$

Ainsi, quand λ est imaginaire, λ' est réel, et l'on a

$$\lambda^2 = -\lambda'^2.$$

On aura de même

$$\mu^2 = -\mu'^2.$$

Dans le cas où le premier énoncé n'a pas de sens, on y substituera donc celui-ci, à condition que P soit extérieur aux deux cercles : *Mener par deux points* O *et* O' *deux droites parallèles sur lesquelles deux cercles concentriques* (t), (t'), *de centre* P, *interceptent deux segments égaux*.

Notre équation (1) revient à

$$(1\ bis) \qquad \text{PD}.\text{PE} = -\left(\overline{\text{PO}}^2 - \text{R}^2\right) + \left(\overline{\text{PO}'}^2 - \text{R}'^2\right).$$

Or, avons-nous vu, les points D et E décrivent deux cercles de diamètres $\text{P}\Omega$ et $\text{P}\Omega_1$. Mais, d'après l'équation (1 *bis*), si le point D décrit un cercle, le point E doit décrire la droite qui en est la transformée inverse réciproque. Ce point devra donc se trouver à l'intersection de cette droite et du cercle décrit sur $\text{P}\Omega_1$ comme diamètre.

La solution de ce problème conduit à un résultat curieux.

Si ds est un élément de courbe, ds' l'élément de sa transformée par rayons vecteurs réciproques, ρ et ρ' les rayons vecteurs, on a

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'};$$

d'où il suit que, si deux arcs finis de courbes transformées l'une de l'autre sont chargés de matière de densité 1, le

potentiel au pôle y est le même que celui qui est dû à l'autre.

Soient U et V les potentiels au pôle de deux droites de longueur $2p$ chargées d'une masse de densité 1 et situées aux distances a et a' du pôle, de manière que la perpendiculaire abaissée du pôle sur elles tombe en leurs milieux. On aura pour potentiel en P de la première droite la valeur de l'intégrale suivante où x désigne la distance d'un élément à l'axe mené par P perpendiculairement à la droite dont nous cherchons le potentiel

$$\mathrm{U} = 2\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Je pose

$$\sqrt{a^2+x^2} = -x+t;$$

d'où

$$a^2 = -2tx+t^2$$

et

$$t\,dx + x\,dt = t\,dt$$

ou

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{dt}{t};$$

d'où

$$2\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2\left[\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]_0^p.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\mathrm{U} = \log\frac{p+\sqrt{a^2+p^2}}{a}$$

ou

$$\frac{p+\sqrt{a^2+p^2}}{a} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{U}};$$

d'où

$$p = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\mathrm{U}}{2}} - e^{-\frac{\mathrm{U}}{2}}\right)$$

ou

$$p = a \sin\mathrm{hyp}\,\frac{\mathrm{U}}{2}.$$

Pour l'autre droite à distance a', nous aurons

$$p = a' \sin\text{hyp}\frac{V}{2};$$

d'où

$$\frac{\sin\text{hyp}\frac{U}{2}}{\sin\text{hyp}\frac{V}{2}} = \frac{a'}{a}.$$

Si je transforme par rayons vecteurs réciproques, $\frac{a'}{a}$ se change dans le rapport inverse, et j'aurai

$$\frac{\sin\text{hyp}\frac{U}{2}}{\sin\text{hyp}\frac{V}{2}} = \frac{a}{a'}.$$

U et V ne changent pas. Les droites deviennent des arcs de cercles, et la solution géométrique donnée plus haut sert à résoudre la question suivante : *Étant donnés deux cercles concentriques* (t), (t') *et deux points* O, O', *mener par* P, *d'une part, et* O, O' *respectivement, d'autre part, deux* CERCLES TANGENTS, *tels que les valeurs en* P *des potentiels* U, V *dus aux parties de ces cercles qui sont extérieures aux cercles donnés* (t) *et* (t') *respectivement satisfassent à la relation*

$$\frac{\sin\text{hyp}\frac{U}{2}}{\sin\text{hyp}\frac{V}{2}} = \frac{a}{a'};$$

c'est-à-dire que le rapport des sinus hyperboliques des demi-potentiels est alors celui des rayons des arcs de cercles. Il suffit de faire une transformation par rayons vecteurs réciproques pour construire ces arcs, lorsque le problème est possible.

— ——

TRANSFORMATIONS ALGÉBRIQUES PAR LE CALCUL DES DIFFÉRENCES;

Par M. E. CESARO.

Nous nous proposons de représenter la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

au moyen des différences successives du premier terme de la série arbitraire

(1) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \ldots.$$

Ayant posé, à cet effet,

$$A_i = a_i u_i, \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i x^i,$$

nous pourrons écrire, symboliquement,

(2) $$F(x) = f(ux) = f(x + x\Delta) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{x^i f^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(u_0).$$

Supposons, par exemple, que la série (1) soit

$$0^r, \quad 1^r, \quad 2^r, \quad 3^r, \quad 4^r, \quad \ldots,$$

r étant entier. Le second membre de (2) s'arrête alors naturellement au $(r+1)^{\text{ième}}$ terme, et l'on peut écrire

(3) $$F(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i f^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(0^r).$$

Du reste, si la série (1) est, d'une manière générale,

$$U(z), \quad U(z+h), \quad U(z+2h), \quad U(z+3h), \quad \ldots,$$

il est presque évident que l'on a, sous forme symbolique,

$$F(x) = U(z + Nh),$$

en supposant que N_r représente le second membre de (3).

Appliquons la formule (3) aux fonctions telles que

$$Q_r(x) = 1^r x + 2^r x^2 + 3^r x^3 + 4^r x^4 + \ldots.$$

Ici

$$a_i = 1, \qquad f(x) = \frac{1}{1-x},$$

et l'on obtient immédiatement la relation connue

$$Q_r(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i \Delta^i(0^r)}{(1-x)^{i+1}},$$

qui donne, pour les nombres de Bernoulli ([1]), l'expression suivante :

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i+1}} \Delta^i(0^{r-1}).$$

Soit, pour généraliser,

$$a_i = i^s, \qquad f(x) = Q_s(x).$$

La formule (3) devient

$$(4) \qquad Q_{r+s}(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i Q_s^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(0^r).$$

Ainsi, pour $s = 1$, on trouve

$$Q_{r+1}(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{(i+x)x^i}{(1-x)^{i+2}} \Delta^i(0^r).$$

En particulier,

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-3} \frac{(-1)^i i}{2^{i+3}} \Delta^{i+1}(0^{r-2}).$$

([1]) Voir notre article *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler.*

De même, pour $s = 2$, on arrive à la formule

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-3} \frac{(-1)^{i-1} i(i-3)}{2^{i+3}} \Delta^i(0^{r-3}); \qquad \text{etc.}$$

On établit autrement la formule (4) en partant de l'égalité

$$Q^{r+s} = Q^r Q^s = Q^s [1 + \Delta(0^r)]^Q;$$

d'où l'on déduit (4), en développant, suivant les puissances de Δ, et en observant que l'on a, sous forme symbolique,

$$x^i Q_s^{(i)}(x) = Q^{s+1}(Q-1)(Q-2)\ldots(Q-i+1).$$

Reprenons l'égalité (3) et remplaçons-y la limite supérieure de i par un nombre quelconque $n \geq r$. Posons

$$(5) \qquad \varphi(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{t^i f^{(i)}(x)}{i!}.$$

Pour effectuer le retour aux nombres u, remarquons que l'égalité (3) devient

$$(6) \quad F(x) = \varphi(x\Delta) = \varphi(ux - x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i^r x^i}{i!} \varphi^{(i)}(-x).$$

Si, par exemple, on fait $a_i = 1$, la formule (5) donne d'abord

$$\varphi(t - x) = \frac{1}{1-t}\left[1 - \left(\frac{x-t}{x-1}\right)^{n+1}\right];$$

d'où l'on déduit, en développant suivant les puissances de t,

$$\frac{\varphi^{(i)}(-x)}{i!} = 1 - \left(\frac{x}{x-1}\right)^{n+1} \times \left(1 - \frac{C_{n+1,1}}{x} + \frac{C_{n+1,2}}{x^2} - \ldots \pm \frac{C_{n+1,i}}{x^i}\right).$$

Si l'on porte ce résultat dans la formule (6), on ob-

tient une nouvelle expression des fonctions Q, considérées précédemment. En particulier, pour $x = -1$, on a

$$B_r = \frac{r}{2^n(2^r - 1)} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} i^{r-1}$$
$$\times (1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n-i-1}),$$

pourvu que $n \geqq r$. Sous une autre forme,

$$B_r = \frac{r}{2^n(2^r - 1)} \sum_{i=1}^{i=n-1} (C_{n,n-i-1}(1^{r-1} - 2^{r-1} + 3^{r-1} - \ldots \pm i^{r-1}).$$

On trouve, pour les nombres de Bernoulli, d'autres expressions analogues, si l'on prend successivement $a_i = i, i^2, i^3, \ldots$. Les formules démontrées dans cet article donnent, d'ailleurs, une foule d'autres résultats, plus ou moins intéressants, qui constituent toujours d'utiles exercices de calcul.

Note. — La formule principale de notre article *Dérivées des fonctions de fonctions* a été précédemment découverte par M. *R. Hoppe*, en 1845. Une formule plus générale, concernant les dérivées d'une fonction quelconque de *plusieurs* fonctions de x, a été publiée par M. *G. Teixeira*, dans le *Journal de Battaglini*, en 1880. Nous donnerons, de cette dernière formule, une démonstration fort simple, basée sur l'emploi de nos signes algorithmiques, et nous chercherons aussi à opérer l'*inversion de la formule de Hoppe*, comme nous l'avons déjà fait, du reste, dans certains cas particuliers.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre du professeur Genese (University College Aberystwyth, Wales).

Permettez que je vous signale un petit défaut dans la démonstration élégante d'un théorème de Steiner, par M. G. Tarry (voir *Nouvelles Annales*, p. 271, 1884). M. Tarry n'a pas remarqué que sa construction donne quatre positions au point O. Donc il y a quatre coniques directrices par rapport auxquelles S et Σ sont polaires réciproques. La vérification analytique est extrêmement simple.

Soient

(S) $$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 = 0,$$

(Σ) $$\lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\gamma^2 = 0,$$

et

(D) $$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$$

les équations des coniques. L'équation de la polaire du point $(\alpha', \beta', \gamma')$ non situé sur S, par rapport à D, est

$$L\alpha'\alpha + M\beta'\beta + N\gamma'\gamma = 0.$$

Cette ligne est tangente à Σ, si

$$\frac{(L\alpha')^2}{\lambda} + \frac{(M\beta')^2}{\mu} + \frac{(N\gamma')^2}{\nu} = 0;$$

donc

$$\frac{L^2}{\lambda l} = \frac{M^2}{m\mu} = \frac{N^2}{n\nu}$$

ou

$$L : M : N :: \pm\sqrt{\lambda l} : \pm\sqrt{m\mu} : \pm\sqrt{n\nu};$$

c'est-à-dire qu'il y a quatre coniques D.

Le théorème de la page 273, savoir : *Le triangle qui a pour sommets trois des points d'intersection est ho-*

mologique à chacun des triangles formés par trois tangentes communes, avait été communiqué par moi à la Société mathématique de Londres en mai 1883. Je l'avais premièrement envoyé à l'*Educational Times;* mais, un géomètre distingué m'ayant fait l'honneur de douter de son exactitude, j'ai publié la démonstration.

La vérification par la méthode de la projection conique serait un bon exercice pour vos jeunes lecteurs.

NÉCROLOGIE.

Nous avons la vive douleur d'annoncer à nos lecteurs la mort d'Edmond Laguerre, décédé le 13 août à Bar-le-Duc. La France perd en lui un de ses géomètres les plus éminents et ses amis le plus sûr et le plus dévoué de tous les amis. Nous consacrerons prochainement à sa vie et à son œuvre la place qu'elles méritent; voici, dès aujourd'hui, les discours prononcés à ses obsèques.

DISCOURS DE M. J. BERTRAND,

AU NOM DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

MESSIEURS,

L'Académie des Sciences, en perdant l'un de ses Membres les plus éminents, a le regret de le voir disparaître au début, pour ainsi dire, de sa carrière académique.

La maladie cruelle qui vient de briser tant d'espérances l'a tenu éloigné de nos travaux.

Edmond Laguerre, passionné pour la Science, semblait indifférent au succès.

Jamais il n'a négligé un devoir, jamais il n'a sollicité une faveur, jamais, dans sa modestie, il n'a voulu se faire son propre juge.

L'artillerie était sa carrière. Il acceptait avec simplicité toutes les nécessités du service, toujours prompt à bien faire,

toujours oublieux de se faire valoir; — il a pris sa retraite jeune encore, sans avoir atteint les hauts grades où son mérite semblait l'appeler.

Tel nous avons connu l'éminent géomètre.

On recherchait, on admirait ses travaux; on avait peine à les réunir : les recueils les plus répandus contiennent à peine le quart de son œuvre. Jamais Laguerre n'a publié un volume. Ses découvertes, communiquées à des sociétés de travail et d'étude, l'avaient placé au premier rang des géomètres français, avant que l'Académie des Sciences en eût entendu discuter et proclamer l'importance. La Section de Géométrie elle-même, heureuse de lui rendre justice, avait fait, avec étonnement, j'ose le dire, l'inventaire de tant de richesses.

Toutes les branches des Mathématiques lui devaient d'importants progrès; aucune chaire publique, cependant, n'avait offert à ce penseur solitaire l'occasion de répandre, par la parole, les idées fécondes confiées au papier avec tant de sobriété et de réserve. Pour la première fois, en l'année 1885, Laguerre, âgé de 51 ans, s'est fait entendre au Collège de France : préparé à suivre toutes les voies, il a accepté la suppléance de la Chaire de Physique mathématique. Il y a révélé, sans étonner personne, une érudition sagace et profonde.

Le cours de Laguerre sur l'attraction des ellipsoïdes donnera, si on peut le publier, le résumé le plus lumineux et le plus savant de cette belle théorie, tant de fois rajeunie et toujours transformée, malgré son admirable perfection.

Laguerre conservait toute la vigueur et l'activité de son esprit, mais les forces physiques commençaient à le trahir. Il luttait, en préparant ses leçons, contre les atteintes d'une fièvre continue; il s'y résignait plutôt, car le mal était sans remède. — L'amitié, la haute estime de tous et l'admiration des bons juges ont adouci la fin prématurée de sa carrière.

Toujours supérieur à sa position, il a su imposer à l'opinion une justice quelquefois moins tardive, jamais plus complète et plus incontestée.

M. Halphen, après avoir lu le discours de M. Bertrand, ajoute l'allocution suivante :

L'École Polytechnique perd une de ses gloires. Pendant vingt-deux ans, Laguerre lui a prodigué son rare talent, son

zèle infatigable. Il la représentait aux yeux de cette jeunesse, chaque année plus nombreuse, qui, dans un loyal concours, brigue, à force de travail, l'entrée de notre grande École. Devant ce public déjà très clairvoyant, l'École Polytechnique, placée si haut dans l'opinion, grandissait encore, représentée par Laguerre.

Tous connaissaient sa science presque sans limite, comme aussi la loyauté, les scrupules qu'il apportait à ses jugements. Mais qui soupçonne seulement son extrême bienveillance, je dirai presque sa tendresse pour cette jeunesse d'élite ? Qui, sauf ses collègues, dont tant de fois il a su adoucir ou changer le verdict ?

Cette grande douceur se dissimulait parfois sous des dehors austères, qui le faisaient redouter un peu, bien à tort.

C'est là d'ailleurs un trait essentiel de sa physionomie morale : son cœur ne livrait pas facilement ses trésors.

Les amis qui ont pu y pénétrer éprouvent à ce souvenir une ineffable tristesse....

Au nom de l'Académie des Sciences et de l'École Polytechnique, j'adresse à Edmond Laguerre un suprême adieu.

ERRATA.

T. II, 3e série, p. 87, dernière ligne, *au lieu de* $\tang(\omega - \theta)$, *lisez* $= \tang(\omega - \theta)$.

T. IV, 3e série, p. 329, ligne 5, *au lieu de* en segments, *lisez* en n segments.

T. V, 3e série, p. 212, première ligne, le mot *parité* ne se rapporte pas aux *triangulaires,* mais à leurs *rangs*.

T. V, 3e série, p. 314, avant-dernière ligne, *au lieu de* générale, *lisez* génératrice.

T. V, 3e série, p. 321, 4e ligne en remontant, *au lieu de* $\left(\log \frac{1}{x}\right) 2^{\nu-1}$, *lisez* $\left(\log \frac{1}{x}\right)^{2\nu-1}$.

NOTE SUR LES POLYGONES FERMÉS (APPLICATION DE LA STATIQUE A LA GÉOMÉTRIE);

PAR M. E. COLLIGNON,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Considérons un polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre n de côtés.

Nous donnerons à ces côtés les numéros successifs de 1 à n, en suivant le périmètre du polygone dans un sens défini, à partir d'un sommet choisi arbitrairement.

Imaginons qu'on prenne le milieu de chaque côté. On obtiendra ainsi n nouveaux points, auxquels nous donnerons les mêmes numéros qu'aux côtés dont ils font partie. Le milieu du côté n° k sera le milieu n° k. Ce même numéro k sera attribué aussi au sommet du polygone commun aux côtés k et $k-1$; il n'y a d'exception que pour le sommet 1, point de départ du numérotage, qui est commun aux côtés n° n et n° 1.

Ces conventions faites, plaçons aux milieux 1, 2, ..., n des masses égales à m en valeur absolue, mais alternativement positives et négatives; de telle sorte que les milieux 1, 3, 5, ... de rang impair reçoivent la masse $+m$, et que les milieux de rang pair, 2, 4, 6, ..., reçoivent la masse $-m$. Au lieu d'admettre des masses négatives, on peut prendre toutes les masses en valeur absolue, sauf à imaginer qu'elles subissent l'action de forces parallèles dirigées dans un sens pour les masses qui avaient tout à l'heure le signe $+$, et en sens opposé pour les masses qui avaient le signe $-$.

Lorsque le polygone a un nombre impair de côtés, cette distribution alternative des signes amène deux

masses positives aux milieux n et 1, qui se suivent sur le contour du polygone; partout ailleurs on aura d'un côté au suivant une variation de signe. Lorsque le nombre n est pair, les variations de signe s'étendent au périmètre tout entier.

Cherchons, dans l'un et l'autre cas, le centre de gravité de l'ensemble des masses qu'on vient de définir.

Décomposons pour cela la masse $\pm m$, appliquée au milieu du côté k, en deux masses égales, $\pm \frac{1}{2} m$, appliquées l'une au sommet k, l'autre au sommet $k+1$. Cette décomposition faite pour tous les côtés, on trouvera, en un sommet k quelconque, une masse $\pm \frac{1}{2} m$ provenant de la décomposition de la masse $\pm m$ située au milieu k, et une masse de signe contraire, $\mp \frac{1}{2} m$, provenant de la décomposition de la masse $\mp m$ située au milieu $k-1$; les deux masses partielles se détruisent et donnent au sommet k une masse nulle. Cette conclusion s'applique au sommet 1 comme à tous les autres lorsque le nombre n est pair; car alors les signes alternatifs règnent sur tout le pourtour du polygone. Il en est autrement si n est impair : le sommet 1 sépare alors deux milieux, 1 et n, chargés tous deux de masses positives; il reçoit deux masses partielles égales à $\frac{1}{2} m$, qui, composées ensemble, forment la masse m. La somme algébrique de toutes les masses est égale à 0 dans le cas de n pair, et à m dans le cas de n impair. On peut formuler ces conclusions comme il suit :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, des masses égales, alternativement positives et négatives, appliquées aux milieux des côtés successifs, se font équilibre et forment un système indifférent; le centre de gravité de leur ensemble est indéterminé.

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre impair de côtés, des masses égales, alternativement positives et négatives, appliquées aux milieux des côtés successifs, ont pour résultante une masse égale, placée au sommet du polygone qui appartient à la fois aux deux côtés consécutifs chargés de masses de même signe; ce sommet est le centre de gravité de l'ensemble des masses données.

Ce théorème fournit une solution simple de certains problèmes sur les polygones. Pour en développer les conséquences, nous examinerons successivement le cas de n impair et de n pair.

Premier cas : n impair.

Étant donnés dans l'espace n points, numérotés de 1 à n, on demande de construire un polygone fermé de n côtés, dont les n points donnés soient les milieux des côtés successifs.

On cherchera le centre de gravité G, ou centre des moyennes distances, des milieux de rang impair, 1, 3, 5, ..., n; on y imaginera réunies $\frac{n+1}{2}$ masses égales positives.

On cherchera ensuite le centre de gravité G′ des milieux de rang pair, 2, 4, 6, ..., $n-1$; on y réunira $\frac{n-1}{2}$ masses égales négatives.

Le centre de gravité général sera le sommet 1 du polygone. On l'obtiendra en cherchant sur la droite GG′ le point d'application de la résultante de deux forces parallèles, l'une égale à $\frac{n+1}{2}$ appliquée en G, l'autre égale à $\frac{n-1}{2}$, appliquée en G′ en sens contraire de la première. Cela revient à prolonger la droite G′G, du côté

du point G, d'une longueur G 1 égale à $\frac{n-1}{2}$ GG'. Le coefficient $\frac{n-1}{2}$ de GG' est toujours entier, puisque n est impair.

Le sommet 1 une fois déterminé, tout le polygone s'en déduit.

Le problème admet toujours une solution et une seule :

Lorsque les milieux donnés sont dans un même plan, le polygone cherché est tout entier dans ce plan. On le voit par la construction du sommet 1. Mais la proposition est évidente *a priori ;* car, si le polygone était gauche, chaque côté traverserait le plan des milieux, et un nombre impair d'intersections empêcherait la fermeture du polygone.

Si, au lieu de prendre les masses m alternativement positives et négatives, on les prenait toutes positives, elles s'ajouteraient pour donner une résultante égale à nm, appliquée en un point γ, centre des moyennes distances des milieux des côtés du polygone ou, ce qui revient au même, centre des moyennes distances de tous les sommets. Pour obtenir ce point γ, il suffira de composer les mêmes forces parallèles, égales à $\frac{n+1}{2}$ et à $\frac{n-1}{2}$, que nous avons considérées tout à l'heure, mais en les dirigeant toutes deux dans le même sens, au lieu de les diriger l'une en sens contraire de l'autre. La force $\frac{n+1}{2}$ est appliquée au point G, la force $\frac{n-1}{2}$ au point G'. Le point d'application γ de la résultante s'obtiendra en partageant GG' dans le rapport inverse des composantes, ce qui donne la proportion

$$\frac{G\gamma}{G'\gamma} = \frac{n-1}{n+1}.$$

On a de même, puisque le sommet 1 est le point d'application de la résultante des mêmes forces dirigées en sens différents,

$$\frac{G1}{G'1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Donc

$$\frac{G\gamma}{G'\gamma} = \frac{G1}{G'1},$$

de sorte que le sommet 1 et le point γ sont conjugués harmoniques par rapport aux points G et G'; et l'on a ce théorème :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre impair des côtés, le sommet 1 est conjugué harmonique du centre de gravité de tous les sommets (ou de tous les milieux des côtés) par rapport aux centres de gravité des deux groupes de points respectivement formés par les milieux des côtés de rang impair, et par les milieux des côtés de rang pair.

Chacun des sommets du polygone peut d'ailleurs être regardé comme le sommet n° 1, en changeant le numérotage. Dans chacune de ces hypothèses, le centre de gravité général γ reste fixe; la droite qui joint au point γ un sommet du polygone contient les centres de gravité, G et G', des deux groupes de milieux, les milieux impairs et les milieux pairs, et la droite mobile GG' est divisée, au point fixe γ et au sommet, dans le rapport constant $\frac{n-1}{n+1}$. On en déduit que le rapport $\frac{\gamma G}{\gamma 1}$ est aussi constant, et égal à $\frac{1}{n+1}$, et que le rapport $\frac{\gamma G'}{\gamma 1}$ est égal à $\frac{1}{n-1}$. Donc :

Les centres de gravité partiels G *et* G' *des masses* $+m$ *et* $-m$, *alternativement placées aux milieux des*

côtés, sont les sommets de deux polygones homothétiques au polygone donné; le centre de similitude est le point γ, centre de gravité général des masses prises toutes positivement, et placées soit au milieu des côtés, soit aux sommets; les rapports de similitude sont respectivement $\frac{1}{n+1}$ *et* $\frac{1}{n-1}$; *enfin la similitude est directe pour le polygone des points* G, *inverse pour le polygone des points* G′.

On pourrait dire aussi :

Le centre de gravité des milieux des côtés de rang impair, 1, 3, 5, ..., n *coïncide avec le centre de gravité des milieux des côtés de rang pair*, 2, 4, 6, ..., $n-1$, *composés avec le sommet* 1.

Les propriétés des centres de gravité s'étendent aisément, d'après les mêmes considérations, à la géométrie des polygones.

Prenons par exemple un point P, arbitraire, et joignons-le à tous les milieux 1, 2, 3, ..., n des côtés d'un polygone donné, d'un nombre impair de côtés. Pour distinguer les milieux des sommets de même numéro, nous donnerons aux milieux des numéros accentués. Ils seront donc représentés par les numéros 1′, 2′, 3′, ..., n'. Cela posé, nous pouvons regarder les droites de jonction P1′, P2′, ..., Pn' comme représentant autant de forces en grandeur et en direction. Les propositions qu'on vient d'établir montrent que la résultante des n forces

$$P1', \quad -P2', \quad P3', \quad -P4', \quad \ldots, \quad -P(n-1)', \quad +Pn',$$

parmi lesquelles les forces dirigées vers les milieux pairs sont changées de sens, est égale à la force P1, représentée par la ligne de jonction du point P au sommet 1.

La démonstration directe de cette proposition est très facile.

De même, appliquons au système des masses $+m$ et $-m$ le théorème sur la somme du produit des masses par les carrés des distances à un point, ou sur le moment d'inertie polaire : il viendra l'équation fondamentale

$$\overline{P1'}^2 - \overline{P2'}^2 + \overline{P3'}^2 - \overline{P4'}^2 + \ldots - \overline{P(n-1)'}^2 + \overline{Pn'}^2$$
$$= \overline{11'}^2 - \overline{12'}^2 + \overline{13'}^2 - \overline{14'}^2 + \ldots - \overline{1(n-1)'}^2 + \overline{1n'}^2 + \overline{P1}^2.$$

Nous pouvons appliquer cette équation en prenant successivement pour sommet 1 chaque sommet du polygone. Appelons

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots \quad E$$

les sommets successifs, et

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots \quad e$$

les milieux des côtés

$$AB, \quad BC, \quad CD, \quad \ldots \quad EA.$$

Appliquons le théorème en prenant d'abord pour sommet 1 le sommet A, puis le sommet B, puis le sommet C, et ainsi de suite jusqu'au sommet E. Il viendra la série de n équations

$$\overline{Pa}^2 - \overline{Pb}^2 + \overline{Pc}^2 - \overline{Pd}^2 + \ldots + \overline{Pe}^2$$
$$= \overline{Aa}^2 - \overline{Ab}^2 + \overline{Ac}^2 - \overline{Ad}^2 + \ldots + \overline{Ae}^2 + \overline{PA}^2,$$
$$\overline{Pb}^2 - \overline{Pc}^2 + \overline{Pd}^2 - \ldots\ldots\ldots + \overline{Pa}^2$$
$$= \overline{Bb}^2 - \overline{Bc}^2 + \overline{Bd}^2 - \ldots\ldots\ldots + \overline{Ba}^2 + \overline{PB}^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{Pe}^2 - \overline{Pa}^2 + \overline{Pb}^2 \ldots\ldots\ldots + \overline{Pd}^2$$
$$= \overline{Ee}^2 - \overline{Ea}^2 + \overline{Eb}^2 \ldots\ldots\ldots + \overline{Ed}^2 + \overline{PE}^2.$$

Faisons la somme, membre à membre, de ces n équations.

On trouvera dans le premier membre de l'équation résultante $\frac{n+1}{2}$ fois chaque terme $\overline{Pa}^2$ avec le signe +, et $\frac{n-1}{2}$ fois avec le signe —; le résultat final est donc simplement le terme $\overline{Pa}^2$ sans aucun coefficient, et, pour les n termes analogues, on trouve en définitive

$$\overline{Pa}^2 + \overline{Pb}^2 + \overline{Pc}^2 + \ldots + \overline{Pe}^2 = \Sigma\,\overline{Pa}^2,$$

pour le premier membre de l'équation finale.

Le second membre contiendra des termes de diverses espèces :

1° On a d'abord la somme

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \ldots + \overline{PE}^2 = \Sigma\,\overline{PA}^2$$

des carrés des distances du point P aux n sommets ;

2° On a ensuite les sommes

$$\overline{Aa}^2 + \overline{Ba}^2,\quad \overline{Bb}^2 + \overline{Cb}^2,\quad \ldots,\quad \overline{Ee}^2 + \overline{Ae}^2$$

des carrés des moitiés des côtés, qui sont égales respectivement à

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{AB}^2,\quad \tfrac{1}{2}\,\overline{BC}^2,\quad \ldots,\quad \tfrac{1}{2}\,\overline{EA}^2,$$

et qui donnent par leur ensemble la moitié de la somme des carrés des côtés, ou $\frac{1}{2}\,\Sigma\,\overline{AB}^2$;

3° Tous les autres termes enfin, pris les uns positivement, les autres négativement, peuvent être réunis dans une même somme. Posons

$$\begin{aligned} S = {} & \overline{Ab}^2 - \overline{Ac}^2 + \ldots\ldots\ldots + \overline{Ad}^2 \\ & + \overline{Bc}^2 - \overline{Bd}^2 + \ldots\ldots\ldots - \overline{Be}^2 \\ & + \overline{Cd}^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \overline{Ca}^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overline{Ea}^2 - \overline{Eb}^2 + \overline{Ec}^2 - \ldots\ldots \end{aligned}$$

Cette somme S est la somme algébrique des carrés des distances de chaque sommet aux milieux des côtés qui n'aboutissent pas à ce sommet, ces carrés étant pris alternativement avec le signe + et le signe —, suivant que la différence des numéros du sommet et des milieux considérés est impaire ou paire.

On a donc, en définitive, l'équation

$$(1) \qquad \Sigma\,\overline{Pa}^2 = \Sigma\,\overline{PA}^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma\,\overline{AB}^2 - S.$$

Mais, dans chaque triangle PAB, où a est le milieu de AB, on a

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{Pa}^2 + 2\overline{Aa}^2;$$

relation qui, appliquée successivement à tous les côtés, donne, en faisant la somme et en divisant par 2,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \ldots + \overline{PE}^2 = \overline{Pa}^2 + \overline{Pb}^2 + \ldots + \overline{Pe}^2 + \overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2 + \ldots + \overline{Ee}^2$$

ou bien

$$(2) \qquad \Sigma\,\overline{PA}^2 = \Sigma\,\overline{Pa}^2 + \tfrac{1}{4}\Sigma\,\overline{AB}^2.$$

Ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), il vient, après réduction,

$$\tfrac{3}{4}\Sigma\,\overline{AB}^2 - S = 0$$

ou bien

$$S = \tfrac{3}{4}\Sigma\,\overline{AB}^2,$$

et l'on a ce théorème :

Dans tout polygone fermé d'un nombre impair de côtés, la somme algébrique des carrés des distances des milieux de chaque côté aux sommets non contigus, ces carrés étant pris alternativement avec le signe + et le signe — à partir du côté le plus voisin de chaque

milieu considéré, est égale aux $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.

On en déduit comme corollaires les propositions suivantes :

Dans tout polygone régulier d'un nombre impair de côtés, la somme algébrique des carrés des distances du milieu d'un côté à tous les sommets non contigus, ces carrés étant pris alternativement avec le signe + et le signe —, est les $\frac{3}{4}$ du carré du côté;

Dans tout triangle, la somme des carrés des médianes est les $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.

Second cas : n pair.

Soit en second lieu un polygone fermé d'un nombre pair n de côtés. Prenons à part les milieux des côtés de rang impair, $1, 3, 5, \ldots, n-1$, puis les milieux des côtés de rang pair, $2, 4, 6, \ldots, n$. Ces deux groupes de points en contiennent un même nombre $\frac{n}{2}$, et pour que le centre de gravité général des masses $+m$ et $-m$ soit indéterminé, il faut et il suffit que le centre de gravité G du groupe des masses positives coïncide avec le centre de gravité du groupe des masses négatives; le point G est en outre le centre de gravité de tous les milieux ou, ce qui revient au même, de tous les sommets. On arrive donc à ce théorème :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, le centre des moyennes distances des milieux des côtés de rang pair coïncide avec le centre des moyennes distances des milieux des côtés de rang impair et avec le centre des moyennes distances de tous les sommets.

Cet énoncé généralise le théorème relatif au quadrilatère :

Dans tout quadrilatère plan ou gauche, les milieux des côtés successifs sont les sommets d'un parallélogramme, ce qui revient à dire que les droites qui joignent respectivement les milieux des côtés opposés se coupent mutuellement en deux parties égales.

Si l'on donne les n milieux des côtés d'un polygone, le nombre n étant pair, et qu'on demande de construire le polygone, en prenant ces milieux dans un ordre déterminé, il faut, pour que le problème soit possible, qu'en prenant ces milieux de deux en deux, les centres de gravité des deux groupes de points que l'on obtient coïncident. Quand cette condition est remplie, on peut construire le polygone d'une infinité de manières, en partant d'un sommet 1 arbitrairement choisi. S'il en est autrement, il n'y a pas de solution possible.

Prenons un point P quelconque dans l'espace. Si l'on joint ce point aux milieux des côtés 1, 2, ..., n, et que l'on considère les lignes de jonction comme représentant des forces en grandeur et en direction, on reconnaît sur le champ que *l'ensemble des forces, agissant alternativement dans le sens de la droite de jonction et en sens contraire, c'est-à-dire des forces*

$$P1,\quad -P2,\quad P3,\quad -P4,\quad \ldots,\quad P(n-1),\quad -Pn,$$

se fait équilibre; en d'autres termes, *les deux groupes de forces*

$$P1,\quad P3,\quad P5,\quad \ldots,\quad P(n-1),$$

et

$$P2,\quad P4,\quad P6,\quad \ldots,\quad Pn,$$

ont la même résultante.

Appliquons aux systèmes des masses m et $-m$ le théorème sur la somme des carrés des distances. Il vient

d'abord, en considérant à part les masses positives ou impaires,

$$\overline{\mathrm{P}1}^2 + \overline{\mathrm{P}3}^2 + \overline{\mathrm{P}5}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}(n-1)}^2$$
$$= \overline{\mathrm{G}1}^2 + \overline{\mathrm{G}3}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{G}(n-1)}^2 + \overline{\mathrm{PG}}^2\,;$$

on aura de même, en prenant les masses négatives ou paires,

$$\overline{\mathrm{P}2}^2 + \overline{\mathrm{P}4}^2 + \overline{\mathrm{PG}}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}n}^2 = \overline{\mathrm{G}2}^2 + \overline{\mathrm{G}4}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{G}(n)}^2 + \overline{\mathrm{PG}}^2.$$

Si l'on retranche ces deux équations, il vient

$$\overline{\mathrm{P}1}^2 - \overline{\mathrm{P}2}^2 + \overline{\mathrm{P}3}^2 - \overline{\mathrm{P}4}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}(n-1)}^2 - \overline{\mathrm{P}n}^2$$
$$= \overline{\mathrm{G}1}^2 - \overline{\mathrm{G}2}^2 + \overline{\mathrm{G}3}^2 - \overline{\mathrm{G}4}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{G}(n-1)}^2 - \overline{\mathrm{G}n}^2,$$

équation dont le second membre est indépendant de la position du point P. Par conséquent :

Dans tout polygone fermé, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, la somme algébrique des carrés des distances d'un point P *quelconque aux milieux des côtés, les carrés étant pris alternativement avec le signe* + *et le signe* —, *est constante, quel que soit le point* P.

Cette proposition résulte immédiatement de la remarque suivante : le point P, quel qu'il soit, peut être regardé comme le centre de gravité du système indifférent formé par les masses $+m$ et $-m$, placées alternativement au milieu des côtés.

Si le polygone donné est régulier, la somme

$$\overline{\mathrm{G}1}^2 - \overline{\mathrm{G}2}^2 + \ldots$$

est identiquement nulle; il en est donc de même de la somme égale

$$\overline{\mathrm{P}1}^2 - \overline{\mathrm{P}2}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{P}(n-1)}^2 - \overline{\mathrm{P}n}^2\,;$$

de sorte que la somme des carrés des distances d'un point P quelconque aux milieux impairs est la même que la somme des carrés des distances du point P aux milieux pairs, et, comme les milieux des côtés d'un polygone régulier sont les sommets d'un polygone régulier semblable au premier, on peut dire aussi que *la somme des carrés des distances du point* P *aux sommets de rang pair d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est égale à la somme des carrés des distances du point* P *aux sommets de rang pair.*

Généralisation du théorème fondamental.

Soit ABCD... F un polygone plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés. Prenons sur le côté AB un point a arbitraire, puis sur le côté BC un point b, tel que le rapport $\frac{Bb}{Bc}$ soit égal au rapport $\frac{Ba}{AB}$; de même prenons sur CD un point c tel qu'on ait $\frac{Cc}{CD} = \frac{Cb}{BC}$, puis un point d sur DE tel qu'on ait $\frac{Dd}{DE} = \frac{Dc}{CD}$, et ainsi de suite, en renversant, à chaque fois qu'on passe d'un côté au suivant, l'ordre des segments homologues tout en en conservant le rapport. Cela revient à dire que les droites ab, bc, cd, ..., qui joignent les points de jonction consécutifs, sont parallèles respectivement aux diagonales AC, BD, DE, ... du polygone.

Si l'on appelle k le rapport $\frac{Aa}{AB}$, on aura

$$\frac{Ba}{AB} = 1 - k = \frac{Bb}{Bc} = \frac{Dc}{CD} = \frac{De}{DE} = \ldots = \frac{Ff}{FA},$$

$$\frac{Aa}{AB} = k = \frac{Cb}{BC} = \frac{Cc}{CD} = \ldots = \frac{Af}{FA}.$$

Cela posé, si l'on applique une masse $+m$ aux points

$a, c, e, \ldots$ de deux en deux côtés, et une masse $-m$ aux points $b, d, \ldots, f$, on pourra décomposer chaque masse m appliquée à un côté AB en deux masses, l'une appliquée en A et égale à $(1-k)m$, l'autre en B, et égale à km; et chaque masse $-m$ appliquée à un côté BC en deux masses, l'une appliquée en B et égale à $-km$, l'autre en C et égale à $-(1-k)m$. L'ensemble de ces masses pour tout le polygone donnera zéro à tous les sommets; et, par conséquent, le centre de gravité des points $a, c, e, \ldots$ coïncide avec le centre de gravité des points $b, d, \ldots, f$.

Pour le quadrilatère, par exemple, les droites ac, bd se coupent mutuellement en deux parties égales, quelle que soit la valeur du rapport k qui définit la position des points.

La même généralisation peut s'appliquer aux polygones qui ont un nombre impair de côtés, mais alors la construction des points $a, b, c, \ldots, f$ doit s'arrêter dès qu'on a atteint le dernier côté du polygone donné. Dans ces conditions, les masses $+m$ aux points a, $c, \ldots, f$, et $-m$ aux points $b, d, \ldots$ amènent, quand on les décompose en masses appliquées aux sommets, une masse unique égale à $+m$, appliquée au premier sommet A; de sorte que le sommet A est en ligne droite avec le centre de gravité g des points $a, c, \ldots, f$, et le centre de gravité g' des points $b, d, \ldots$, et la distance Ag est égale à $\frac{n-1}{2} gg'$, n étant le nombre des côtés du polygone.

Cette remarque permet de construire un polygone de n côtés (n étant impair), si l'on donne les n points a, $b, c, \ldots, f$ qui partagent les côtés dans un même rapport, en renversant l'ordre des segments pour chaque côté successif.

LES LIGNES BARYCENTRIQUES;

Par M. E. CESARO.

1. Appelons *barycentrique* d'une courbe (M) le lieu des centres de gravité des arcs de la courbe, comptés à partir d'un point fixe. En faisant varier l'origine des arcs, on obtient, pour une même ligne, une infinité de barycentriques. Supposons d'abord que la ligne (M) soit plane, et considérons une barycentrique déterminée (G). Si x et y sont les coordonnées du barycentre G, relativement à la tangente et à la normale à (M), en M, on a, d'après ce qui a été dit dans l'article *Sur les lignes de poursuite,* et en adoptant les notations de l'article *Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques,*

$$(1)\qquad \frac{\delta x}{ds} = -\frac{x}{s}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{y}{s};$$

car le point G *poursuit* constamment M, avec une vitesse qui est à celle de M comme la distance MG est au chemin parcouru par M. Par conséquent,

$$(2)\qquad \frac{d(sx)}{ds} = \frac{sy}{\rho} - s, \qquad \frac{d(sy)}{ds} = -\frac{sx}{\rho}.$$

Outre le centre de gravité, il y a une double infinité de points, dont les coordonnées vérifient ces relations : ils constituent le *système de poursuite* barycentrique ou, plus simplement, le système barycentrique dont (M) est la ligne fondamentale.

2. Soit P un point du système, et désignons par α, β ses coordonnées. Les coordonnées d'un autre point Q

pourront prendre la forme

$$x = \alpha + u \cos\omega, \qquad y = \beta + u \sin\omega,$$

où l'on doit chercher à déterminer u et ω, de manière à satisfaire aux conditions (2). On trouve

$$\frac{d(su)}{ds} = 0, \qquad \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\rho}.$$

La dernière égalité montre que la direction PQ est invariable, et la première nous dit que la distance PQ varie en raison inverse de s. Il en résulte que le système barycentrique se déplace parallèlement à lui-même, en se retrécissant toujours, de manière que les distances mutuelles de ses points varient en raison inverse du chemin décrit par M sur la ligne fondamentale. L'ensemble des trajectoires de tous les points du système sera appelé *faisceau barycentrique* de la ligne (M), relativement à l'origine des arcs. Par exemple, les faisceaux barycentriques d'une droite D sont les faisceaux de droites, qui ont leurs centres sur D et sont superposés une infinité de fois à eux-mêmes.

3. La *clothoïde* est une ligne plane, dont la courbure varie proportionnellement à l'arc. En coordonnées intrinsèques, son équation est donc $\rho s = a^2$. Cela étant, voyons s'il est possible de déterminer une ligne dont les centres de courbure fassent partie du système barycentrique. Pour que les conditions (2) soient remplies lorsque $x = 0$, $y = \rho$, il faut et il suffit que le produit ρs soit constant. Donc *la développée de la clothoïde appartient au faisceau barycentrique de cette ligne*, relatif au point de nulle courbure O. Cela nous permet de déterminer le centre de gravité d'un arc OM de clothoïde. Soient, en effet, G le centre de gravité et C

le centre de courbure au point M. Nous savons que la droite CG se déplace parallèlement à elle-même : elle est donc parallèle à la normale à la courbe, menée par O; car, en ce point, G se confond avec O. Par cette raison même, dans la position initiale, la distance CG, bien qu'infinie, est certainement exprimée par ρ : elle sera donc toujours mesurée par ρ, puisqu'elle doit varier en raison inverse de l'arc. En d'autres termes, G est constamment situé sur la circonférence osculatrice. Conséquemment, *le centre de gravité d'un arc de clothoïde, compté à partir du point de nulle courbure* O *jusqu'à un point quelconque* M, *est un point de la circonférence osculatrice en* M *à la courbe, situé sur le diamètre perpendiculaire à la tangente en* O. On démontre aussi très facilement que *la distance* GM, *comptée sur la circonférence osculatrice, est la moitié de l'arc de clothoïde* OM.

4. La clothoïde s'étend sans singularités depuis le point de nulle courbure et s'enroule autour d'un point asymptotique à courbure infinie, centre de gravité de toute la courbe et centre du faisceau barycentrique. La barycentrique de la clothoïde, au contraire, admet une infinité de points de rebroussement, situés sur la clothoïde : chacun d'eux jouit de la propriété d'être simultanément extrémité et barycentre d'un arc de clothoïde, dont l'autre extrémité est toujours le point de nulle courbure. A partir de ce point, les rebroussements de la barycentrique se succèdent de plus en plus fréquemment et partagent la courbe en une infinité de boucles, dont les longueurs vont en diminuant comme les termes de la série $1, \sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{4}-\sqrt{3}, \ldots$ La clothoïde est douée d'un grand nombre d'autres propriétés intéressantes. Citons-en une : *Si une clothoïde, de pa-*

ramètre a, est appliquée, par simple torsion, sur une sphère de rayon a, sa torsion varie comme la courbure de la développée d'une chaînette d'égale résistance. Nous devons rappeler ici que la *chaînette d'égale résistance,* étudiée par M. E. Collignon, est représentée par l'équation

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

de sorte qu'elle est caractérisée par la propriété suivante : *Si une chaînette d'égale résistance roule sur une droite, le centre de courbure correspondant au point de contact décrit une chaînette* ordinaire, qui admet pour directrice la droite considérée. On sait, en outre, que la *voûte sans surcharge,* proposée par Yvon Villarceau, s'obtient en renversant une chaînette d'égale résistance. Enfin, il est évident que, *lorsqu'une clothoïde roule sur une droite, le centre de courbure, correspondant au point de contact, reste sur une hyperbole équilatère,* asymptotique à la droite considérée.

5. On distingue aisément le centre de gravité, dans la double infinité des points satisfaisant à (2). Il suffit d'intégrer ces équations, en supposant $x=0$, $y=0$, pour $s=0$. La question se ramène immédiatement à l'intégration de l'équation

$$\rho\frac{d(sz)}{ds} + isz + \rho s = 0,$$

où

$$z = x + iy, \qquad i^2 + 1 = 0.$$

Si l'on fait sz égal au produit de deux fonctions, dont on dispose convenablement, on trouve, en intégrant et en supposant $z=0$ pour $s=0$, une équation qui se

dédouble en

$$(3)\qquad x = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \qquad y = -\xi\sin\theta + \eta\cos\theta,$$

où l'on a posé

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \int_0^s \frac{ds}{\rho}, \\ -s\xi &= \int_0^s s\cos\theta\, ds, \\ -s\eta &= \int_0^s s\sin\theta\, ds \end{aligned}\right.$$

Si, par exemple, $\rho s = a^2$, les équations (4) donnent d'abord

$$\theta = \frac{s^2}{2a^2}, \qquad \xi = -\rho\sin\theta, \qquad \eta = -\rho(1-\cos\theta);$$

puis, par substitution dans (3),

$$x = -\rho\sin\theta, \qquad y = \rho(1-\cos\theta),$$

ce qui confirme les propriétés énoncées précédemment.

6. Quand on a trouvé, au moyen des formules (3), les valeurs de x et y en fonction de s, on obtient, en éliminant cette variable, l'équation de la ligne que le centre de gravité semble décrire par rapport aux axes mobiles. Mais, si l'on veut connaître la trajectoire absolue du centre de gravité, dans le plan de (M), on doit recourir aux formules (1). On trouve aisément que les coordonnées intrinsèques de la barycentrique cherchée sont données par les formules

$$s_0 = \int_0^s (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s}, \qquad \rho_0 = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{sy}.$$

Ainsi, dans le cas de la clothoïde, on a

$$s_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta\sqrt{\theta}}\, d\theta, \qquad \rho_0 = a\sqrt{2}\, \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta\sqrt{\theta}}.$$

Il faudrait éliminer θ entre ces égalités pour obtenir l'équation intrinsèque demandée. Si l'on veut éviter une intégration, on peut dire que la barycentrique de la clothoïde, relativement au point de nulle courbure, est une développante de la courbe représentée par les équations simultanées

$$s = \frac{a \sin\varphi}{2\varphi\sqrt{\varphi}}, \qquad \rho = \frac{a(2\varphi\cos\varphi - 3\sin\varphi)}{4\varphi^2\sqrt{\varphi}}.$$

7. On généralise aisément les considérations qui précèdent, en supposant que la ligne (M) soit matérialisée suivant une certaine loi, c'est-à-dire que chacun de ses éléments soit chargé d'un poids $q\,ds$, où q est une fonction déterminée de s. La propriété de la *translation parallèle du système de poursuite* subsiste toujours; mais la *variation des distances mutuelles des points du système* se laisse régir par d'autres lois. On obtient, en général,

$$u = e^{-\int \frac{q\,ds}{s}}.$$

En particulier, pour $q = 1$, on voit que le produit su est constant, et l'on retrouve ainsi les résultats qui précèdent. Si $q = \frac{1}{\rho}$, le point G est appelé, d'après Steiner, *barycentre de courbure* de l'arc s. Ce point est très facile à construire lorsqu'il s'agit des courbes définies par l'équation générale

$$\rho = cs^n.$$

On a, pour $n = 1$, la *spirale logarithmique;* pour $n = -1$, la *clothoïde;* pour $n = 0$, le *cercle;* pour $n = \frac{1}{2}$, la *développante de cercle;* etc. Pour toutes ces courbes, si l'on veut avoir le barycentre de courbure d'un arc compris entre l'origine O et un point quelconque M, on doit chercher d'abord les points C, D, qui

correspondent à M sur la développée et sur la développante de (M) : *Le barycentre de courbure de l'arc* OM *est l'intersection des perpendiculaires abaissées respectivement des points* M, C *sur les droites* OD, OM. En particulier, tout arc de spirale logarithmique, ayant une extrémité au pôle, admet ce point pour barycentre de courbure. Enfin, si l'on veut que (G) soit la développée de (M), on doit prendre

$$q = -\frac{s\,d\rho}{\rho\,ds}.$$

Les systèmes de poursuite, relatifs à ce cas particulier, se déplacent parallèlement à eux-mêmes, comme cela arrive en général; mais les distances mutuelles de leurs points varient proportionnellement au rayon de courbure de la trajectoire fondamentale.

8. Pour la recherche des barycentriques des lignes à double courbure, les formules fondamentales sont

$$(5)\qquad \frac{\delta x}{ds} = -\frac{x}{s},\qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{y}{s},\qquad \frac{\delta z}{ds} = -\frac{z}{s},$$

et, par suite, on a

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(sx)}{ds} = \dfrac{sz}{\rho} - s, \\ \dfrac{d(sy)}{ds} = \dfrac{sz}{r}, \\ \dfrac{d(sz)}{ds} = -\dfrac{sx}{\rho} - \dfrac{sy}{r}. \end{cases}$$

La triple infinité de points, remplissant ces conditions, constitue le système barycentrique de la ligne (M). Si α, β, γ sont les coordonnées de l'un de ces points, les coordonnées de tout autre point du système sont

$$x = \alpha + \lambda u,\qquad y = \beta + \mu u,\qquad z = \gamma + \nu u,$$

où l'on doit déterminer la distance u et les cosinus directeurs λ, μ, ν, de manière que les équations (6) soient vérifiées. Pour cela, il faut que l'on ait

$$\frac{d(\lambda su)}{ds} = \frac{\nu su}{\rho},$$

$$\frac{d(\mu su)}{ds} = \frac{\nu su}{r},$$

$$\frac{d(\nu su)}{ds} = -\frac{\lambda su}{\rho} - \frac{\mu su}{r}.$$

Ces équations, multipliées respectivement par λsu, μsu, νsu, et additionnées, montrent que *le produit su est constant*. Par suite,

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\nu}{\rho}, \qquad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\nu}{r}, \qquad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{\lambda}{\rho} - \frac{\mu}{r},$$

c'est-à-dire que *la direction* (λ, μ, ν) *est invariable*. Le système barycentrique d'une ligne à double courbure se transporte donc parallèlement à lui-même dans l'espace, pendant que les distances mutuelles de ses points varient en raison inverse du chemin parcouru par le point M sur la trajectoire fondamentale.

9. Enfin, les formules (5) permettent de calculer les rayons de courbure de la barycentrique, en fonction des coordonnées x, y, z, du centre de gravité, que l'on suppose connues; car il est facile de les déterminer au moyen des équations (6) et des conditions $x = y = z = 0$ pour $s = 0$. On a d'abord

$$(7) \qquad s_0 = \int_0^s \frac{u\,ds}{s},$$

où

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ensuite les cosinus directeurs de la tangente à (G) sont

$$a = -\frac{x}{u}, \qquad b = -\frac{y}{u}, \qquad c = -\frac{z}{u}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial a}{ds} = \frac{y^2 - z^2}{u^3}, \qquad \frac{\partial b}{ds} = -\frac{xy}{u^3}, \qquad \frac{\partial c}{ds} = -\frac{xz}{u^3}.$$

En élevant au carré et en ajoutant, on obtient sans peine, comme expression du premier rayon de courbure,

$$(8) \qquad \rho_0 = \frac{u^3}{s\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

En outre, les dernières formules montrent que les cosinus directeurs de la normale principale sont donnés par les égalités

$$f = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{u}, \qquad g = -\frac{xy}{u\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad h = -\frac{xz}{u\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

et, par suite, ceux de la binormale sont

$$l = 0, \qquad m = -\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad n = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

D'après cela, le plan osculateur à (G) passe par la tangente à (M). Enfin, on a aussi

$$\frac{\partial l}{ds} = -\frac{y}{\rho\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial m}{ds} = \frac{xy}{y^2 + z^2}\,\frac{y}{\rho\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial n}{ds} = \frac{xz}{y^2 + z^2}\,\frac{y}{\rho\sqrt{y^2 + z^2}},$$

et, par suite, le rayon de torsion est

$$(9) \qquad r_0 = \frac{\rho(y^2 + z^2)}{sy}$$

Par substitution de x, y, ..., en fonction de s, dans les formules (7), (8), (9), et par élimination de s, on parvient aux équations intrinsèques de la courbe (G). D'ailleurs, il est évident que les formules précédentes sont applicables à toutes les courbes, qui appartiennent au faisceau barycentrique de la trajectoire considérée.

ENVELOPPES DES COTÉS D'UN CARRÉ INVARIABLE DONT DEUX SOMMETS DÉCRIVENT DEUX DROITES RECTANGULAIRES;

Par M. J.-B. POMEY.

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, et ABCD un carré invariable de grandeur, dont le côté $AB = a$; les sommets A et B glissent sur Ox et Oy. On demande l'enveloppe de AB et celle de BC.

Soit E le point de rencontre des perpendiculaires en A et B aux axes. Ce point est le centre instantané de rotation. Ses projections M, N, P, Q sur les côtés du carré sont les points où ces côtés touchent leurs enveloppes.

Les points A et B décrivant des droites Ox, Oy, le centre géométrique des accélérations est situé en O, et cela permet de construire le rayon de courbure des enveloppes.

Remarque. — Les points C et D décrivent des épicycloïdes, car le lieu du centre instantané de rotation est, dans le plan xOy, le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, et, dans le plan variable, c'est le cercle décrit sur AB comme diamètre, de sorte que le mouvement du carré est celui qui lui serait imprimé par un engrenage de La Hire, par

le roulement dans un cercle de rayon a d'un cercle de rayon moitié $\left(\frac{a}{2}\right)$.

Désignons par x, y les segments OA, OB interceptés sur les axes par la droite variable AB, on aura, pour équation de AB,

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1.$$

En différentiant cette équation et l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

on obtient

$$\frac{X\,dx}{x^2} + \frac{Y\,dy}{y^2} = 0, \qquad x\,dx + y\,dy = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{X}{x^3} = \frac{Y}{y^3}.$$

Extrayant les racines cubiques, employant la formule

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et élevant à la puissance $\frac{2}{3}$, on obtient aisément

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

pour équation du lieu du point M.

Si l'on pose $2a = b$ et qu'on remarque que le segment A'B' intercepté sur NQ par les axes est égal à b, on obtient pour enveloppe de NQ

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}}.$$

Le lieu du point N est une trajectoire orthogonale des droites A'B'. Posant cette fois $x = OA'$, $y = OB'$, on a pour équation de A'B'

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$$

avec

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Si X, Y sont les coordonnées d'un point qui décrit une de ces trajectoires orthogonales, nous aurons

$$\frac{dY}{x} = \frac{dX}{y} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{b}.$$

Portant $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ dans $\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$, il vient l'équation différentielle suivante :

$$X + YY' = \frac{bY'}{\sqrt{1 + Y'^2}}.$$

Il s'agit de l'intégrer. On l'intègre par différentiation en posant

$$Y' = \operatorname{tang} \alpha.$$

Ce changement de variable donne

$$X + Y \operatorname{tang} \alpha = b \sin \alpha.$$

Différentiant, il vient

$$dX + dY \operatorname{tang} \alpha + Y \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = b \cos \alpha \, d\alpha.$$

On a d'ailleurs

$$dY = \operatorname{tang} \alpha \, dX,$$

d'où

(1) $$Y = b \cos \alpha - X \cot \alpha,$$

et substituant dans l'équation précédente, on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dX}{d\alpha} - X \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b \cos \alpha \sin^2 \alpha = 0.$$

Intégrant, il vient

$$X = \sin \alpha (C - a \sin^2 \alpha) \qquad (2a = b);$$

d'où, en remplaçant X par son expression en α dans

l'équation (1),

$$Y = \cos\alpha(b - C + a\sin^2\alpha) \qquad (2a = b).$$

X, Y sont ainsi exprimés en fonction du paramètre α.

Pour $C = a$, il vient

$$X = a\sin\alpha\cos^2\alpha, \qquad Y = a\cos\alpha(1 + \sin^2\alpha).$$

Si je prends $\widehat{OBA} = \alpha$ et que je cherche directement les coordonnées du point N comme projection de E sur BC, j'obtiens précisément ces formules.

Pour éliminer α, je pose $\sin\alpha = u$, et, au moyen des équations transformées,

$$(2) \qquad \frac{X}{a} = u(1 - u^2), \qquad \frac{Y}{a} = \sqrt{1 - u^2}(1 + u^2),$$

je forme $\frac{X^2 + Y^2}{X}$, il vient

$$(3) \qquad 3u^2 - u\frac{X^2 + Y^2}{aX} + 1 = 0.$$

Et d'ailleurs la première des équations (2) est

$$(4) \qquad u^3 - u + \frac{X}{a} = 0.$$

Je multiplie (3) par $-u$, (4) par $+3$, j'ajoute et j'ai

$$(5) \qquad u^2\frac{X^2 + Y^2}{aX} - 4u + \frac{3X}{a} = 0.$$

J'élimine u entre (3) et (5), d'après la formule qui donne

$$(ab' - ba')(bc' - cb') = (ac' - ca')^2$$

pour résultant de

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

J'ai ainsi

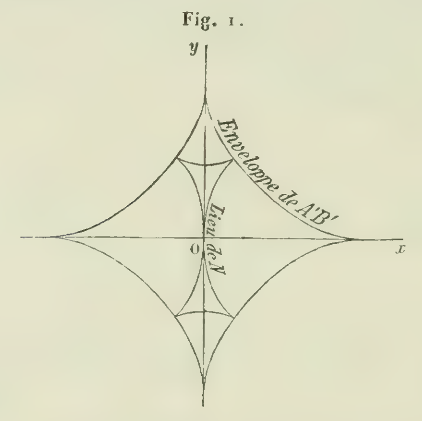
$$\left[-\left(\frac{X^2+Y^2}{aX}\right)^2+12\right]\left(-4+3\,\frac{X^2+Y^2}{a^2}\right) = \left(\frac{X^2+Y^2}{aX}-\frac{9X}{a}\right)^2$$

ou, en développant,

$$(X^2+Y^2)^2(X^2+Y^2-a^2)-9\left[X^2-2Y^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]=0.$$

Il en résulte une courbe de la forme suivante :

Fig. 1.



La courbe a quatre points de rebroussement là où elle rencontre sa développée, qui est

$$X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}.$$

La valeur de l'angle α correspondant ne paraît pas simple.

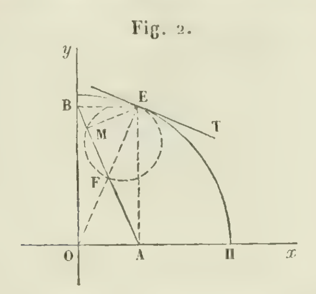
La courbe a la forme indiquée à l'origine; car, pour $X^2=0$, il vient

$$Y^4=0.$$

Pour compléter cette étude, j'ajouterai les remarques suivantes :

Soit F le milieu de OE et, par suite, le milieu de AB. Soit ET la tangente en E au cercle décrit de O comme

Fig. 2.



centre avec $OE = AB = a$ comme rayon. Je décris sur $FE = \frac{a}{2}$ comme diamètre un cercle qui touche ET en E. On a

$$\text{angle}\,TEM = \text{angle}\,TEF + \text{angle}\,FEM,$$
$$\text{angle}\,FEM = \text{angle}\,FEB - \text{angle}\,BEM,$$

et, en appelant α l'angle EOx, il vient

$$\text{angle}\,TEM = \frac{\pi}{2} + \left[\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = 2\alpha;$$

d'où, en appelant H le point où Ox est coupé par le cercle de rayon OE,

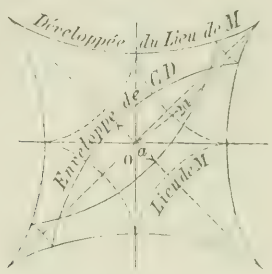
$$\text{arc}\,EH = \text{arc}\,EFM.$$

Ainsi le point M décrit une hypocycloïde. Il est toujours en coïncidence avec le point décrivant d'un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ tangent intérieurement à un cercle de rayon a dans lequel il roule, si ce point décrivant part de H.

Comme on a $MP = a$, on voit encore que l'enveloppe de AB et celle de CD sont les développantes d'une même développée (courbes parallèles). L'enveloppe de CD est aisée à construire : on voit géométriquement qu'elle a deux points doubles et deux rebroussements.

Cherchons le rayon de courbure en M de l'enveloppe

Fig. 3.



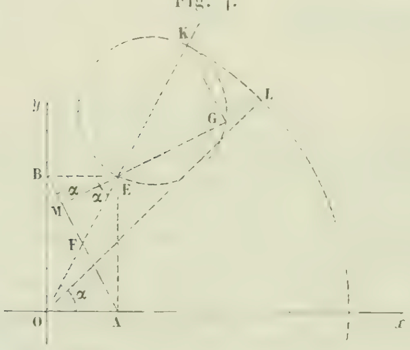
de AB. Les coordonnées du point M, en fonction du paramètre variable $\widehat{\mathrm{EOA}} = \alpha$, sont

$$x = a\cos^3\alpha, \qquad y = a\sin^3\alpha.$$

Car on a

$$x = \text{proj. BM (sur } Ox\text{)},$$
$$\text{BM} = \text{proj. BE (sur BM)},$$
$$\text{BE} = \text{proj. AB (sur BE)},$$

Fig. 4.



les trois droites faisant avec leurs projections le même angle qui est l'angle $\mathrm{EOA} = \alpha$.

Par suite

$$\frac{dx}{d\alpha} = -3a\cos^2\alpha\sin\alpha,$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 3a\sin^2\alpha\cos\alpha;$$

d'où

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\alpha^2} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = \mathrm{R}^2 = 3^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

R étant le rayon de courbure; d'où

$$\mathrm{R} = 3\,\mathrm{ME}.$$

Soit $\mathrm{MG} = 3\,\mathrm{ME}$ et soit K le point de OE qui se projette sur ME en G. On a

$$\mathrm{EK} = \mathrm{EO} = a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{OK} = 2a.$$

De plus, on a

$$\text{angle}\,\mathrm{KEG} = \widehat{\mathrm{MEF}} = 2\alpha - \frac{\pi}{2},$$

et, dans le cercle décrit sur EK comme diamètre,

$$\text{arc}\,\mathrm{KG} = \frac{a}{2}(4\alpha - \pi) = a\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Soit $\mathrm{LO}x = \frac{\pi}{4}$. On a

$$\text{arc}\,\mathrm{KL} = 2a\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = a\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$\text{arc}\,\mathrm{KG} = \text{arc}\,\mathrm{KL};$$

donc le point G, centre de courbure de l'enveloppe de AB, est entraîné dans un mouvement hypocycloïdal par un cercle de rayon a, roulant dans un cercle de rayon $2a$. Le point décrivant est un point du petit cercle qui coïncide avec le point de contact des deux cercles roulants quand ce point de contact vient sur la bissectrice de l'angle $y\mathrm{O}x$. Donc, par rapport aux

bissectrices des angles des axes, l'équation de cette développée est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

C'est le même lieu que celui du point E qu'on aurait fait tourner de 45°. C'est une développante de cette courbe que le côté CD a pour enveloppe. Par rapport aux bissectrices de yOx prises comme axes, on aura donc pour équations d'un point de cette enveloppe de CD

$$x = \sin\alpha(C - 2a\sin^2\alpha),$$
$$y = \cos\alpha(4a - C + 2a\sin^2\alpha),$$

α étant un nouveau paramètre, C une constante à déterminer.

Par rapport aux anciens axes, les équations du lieu du point P sont

$$X = \sin^3\alpha + \cos\alpha, \qquad Y = \cos^3\alpha + \sin\alpha,$$

ou

$$X\sin\alpha + Y\cos\alpha = 1 + \sin\alpha\cos\alpha,$$
$$X\cos\alpha - Y\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Mais cela suffit, et nous n'essayerons pas d'éliminer α.

Toutefois remarquons que le premier système résolu en X, Y s'obtient directement en considérant la position du point P obtenue comme projection du centre instantané de rotation et faisant $a = 1$ pour plus de simplicité. Les secondes équations s'en déduisent aisément. Et il est à noter que la seconde est la dérivée de la première par rapport à α. Si, réciproquement, on avait pris d'abord l'équation de la droite CD et qu'on eût cherché son enveloppe par la méthode ordinaire, c'est le deuxième système que l'on eût obtenu d'abord.

Si l'on cherche quelle est, de toutes les droites passant par le point M, celle pour laquelle le segment AB intercepté par les axes rectangulaires Ox, Oy est un minimum,

la solution est fournie par la tangente à la courbe appartenant à la famille définie par l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

pour laquelle a varie, qui passe par le point M; et, par suite, si X, Y sont les coordonnées de ce point, la grandeur du minimum est

$$a = (X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Cela est évident si l'on observe que le point M peut être considéré comme le point de rencontre de deux tangentes infiniment voisines menées par ce point à la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

sur laquelle il est situé. Or, pour cette courbe, les segments interceptés par les axes sur les tangentes sont constamment égaux entre eux et leur longueur est a. Donc la variation de longueur du segment intercepté par les axes sur une droite pivotant autour de M tombe au second ordre d'infiniment petit auprès de la position de la tangente en M à la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

qui y passe. C'est donc pour cette position qu'on obtient le minimum.

Si nous considérons maintenant l'aire balayée par la droite AB dans son mouvement, nous voyons aisément que, tandis que le segment variable AM, compris entre la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

et l'axe des x, décrit une fois l'aire intérieure Σ de l'hypocycloïde, le second segment MB la décrit lui-même

aussi une fois, de sorte que l'aire totale balayée par la droite AB est 2Σ. Or l'aire élémentaire balayée par AB est $\frac{a^2\,d\alpha}{2}$. Donc

$$2\Sigma = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\alpha.$$

Mais $\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi$ (car AB tourne de 2π); donc

$$\Sigma = \frac{2\pi a^2}{4} = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

L'aire de l'enveloppe de BC se trouve aussi aisément, car on a

$$\mathrm{BN} = a \sin\alpha \cos\alpha;$$

d'où, pour l'aire,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{BN}}^2\, d\alpha &= \int_0^{2} \frac{a^2}{2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{8}\sin^2 2\alpha\, d\alpha = \int_0^{4\pi} \frac{a^2}{16}\sin^2\beta\, d\beta \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{a^2}{16}\,\frac{1-\cos 2\beta}{2}\, d\beta = \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi a^2}{2^3}.\end{aligned}$$

SUR UNE FONCTION QUI A UNE LIGNE D'INFINIS;

Par M. J.-B. POMEY.

On considère souvent en Analyse et l'on rencontre dans la théorie du potentiel des fonctions qui sont discontinues le long de lignes.

Je me propose de former ici, *a priori*, une fonction qui a une ligne d'infinis.

A cet effet, soit ω une variable imaginaire. J'envisage

la série double dont le terme général est

$$\frac{1}{(x+\omega y)^{2+\alpha}},$$

x et y devant prendre toutes les valeurs entières positives et négatives, et α étant un nombre réel positif.

Je vais montrer d'abord que, si ω est imaginaire, la série est convergente.

Les points qui sont les affixes des quantités imaginaires $x+\omega y$ sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes dont les côtés sont 1 et ω.

Si r représente la distance de l'origine à l'un quelconque de ces sommets (l'origine étant naturellement exclue du nombre de ces sommets), la série des modules pourra être désignée par

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}}.$$

Je dis qu'elle est convergente.

Soient :

A un des parallélogrammes;
S sa surface;
$d\sigma$ un élément de son aire;
u la distance de l'origine à $d\sigma$;
r la distance de l'origine au sommet de A, qui en est le plus éloigné.

On aura, en étendant l'intégration à tous les éléments $d\sigma$ de A,

$$\int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}} > \frac{1}{r^{2+\alpha}} \int d\sigma$$

ou

$$\frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}}.$$

Cela posé, nous pouvons négliger, dans la série

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}},$$

les termes qui se rapportent aux parallélogrammes A en nombre fini qui ne sont pas complètement extérieurs à un cercle de rayon R, dont le centre est à l'origine. Alors la divergence ou la convergence de la série ne pouvant être altérée par cette suppression, et le signe de sommation ne se rapportant qu'à des sommets extérieurs à ce cercle, j'aurai

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int_{\sum A} \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}};$$

l'intégrale est prise ici à l'intérieur de tous les parallélogrammes qui sont tout à fait extérieurs au cercle R, et l'on aura, *a fortiori*,

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}},$$

si l'on étend en plus l'intégrale aux portions extérieures au cercle R des parallélogrammes que ce cercle coupe, de manière que dès lors l'intégrale est étendue à toute la portion du plan extérieure au cercle R.

L'intégrale peut se calculer aisément en prenant pour élément d'aire l'aire comprise entre deux cercles décrits de l'origine comme centre avec u et $u + du$ pour rayon

On a ainsi

$$\int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}} = 2\pi \int \frac{du}{u^{1+\alpha}} = -\frac{2\pi}{\alpha}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)_{R}^{\infty} = \frac{2\pi}{\alpha R^{\alpha}}.$$

Donc on a

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \frac{2\pi}{\alpha R^{\alpha}}.$$

Si donc ω est imaginaire, la série en question est convergente.

Mais, si ω est réel, S est nul, et le raisonnement précédent tombe en défaut. De plus, $x + \omega y$ s'annule, si ω est commensurable, pour une infinité de valeurs de x et de y, la série diverge alors comme ayant une infinité de termes infinis, parce que leurs dénominateurs sont nuls. Et, si ω est incommensurable, un raisonnement direct connu, ou un résultat tiré de la théorie des fractions continues, nous apprend que $x + \omega y$ peut être rendu moindre que $\frac{1}{y}$ pour des valeurs convenables infiniment grandes de x et de y; la série diverge donc encore, comme ayant un nombre infini de termes infiniment grands. Notre série double a donc bien une ligne d'infinis qui est l'axe des quantités réelles.

NOTE SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$;

PAR M. VICTOR DE STRÉKALOF.

Pour trouver l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$, M. J.-B. Pomey propose (dans les *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. IV, p. 193) un procédé particulier qui, étant entièrement artificiel, nous semble outre cela, pour le but, excessivement long. Cependant, l'intégrale dont il s'agit se trouve simplement et brièvement de la manière suivante :

En posant $z = \operatorname{tang}\varphi$, on aura

$$dz = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \qquad (1 - z^2)^2 = \frac{1}{\cos^4\varphi}$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int \cos^2\varphi \, d\varphi.$$

Or

$$\int \cos^2\varphi \, d\varphi = \int \cos\varphi \, d(\sin\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi + \int \sin^2\varphi \, d\varphi$$
$$= \sin\varphi\cos\varphi + \varphi - \int \cos^2\varphi \, d\varphi;$$

d'où

$$2\int \cos^2\varphi \, d\varphi = \sin\varphi\cos\varphi + \varphi + \text{const}.$$

Donc

$$2\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z^2}{1+z^2} + \text{arc tang}\, z + \text{const}.$$

NOTE SUR LA DÉVIATION DANS L'ELLIPSE;

Par M. Maurice d'OCAGNE.

Les variations de l'élément que nous avons appelé la *déviation* en un point d'une ellipse peuvent être étudiées par un procédé tout élémentaire qui, outre l'avantage de parler très clairement à l'esprit, a celui d'éviter l'emploi d'une différentiation pour la recherche du maximum. Voici quel est ce procédé :

La formule (1) de notre Note peut s'écrire

$$(1') \qquad \text{tang}\,\delta = \frac{(a-b)\sin 2\varphi}{a+b-(a-b)\cos 2\varphi}.$$

Portons sur une droite les segments $OA = 2a$, $OB = 2b$, et sur AB comme diamètre décrivons un cercle, dont C est le centre. Nous avons $OC = a + b$, $BC = a - b$. Si donc nous prenons sur la circonférence du cercle C le point M tel que $\widehat{MCB} = 2\varphi$, nous avons, en abaissant de M sur OA la perpendiculaire MP, et en

joignant le point M au point O,

$$MP = (a-b)\sin 2\varphi, \qquad PC = (a-b)\cos 2\varphi.$$

$$\operatorname{tang} MOP = \frac{MP}{OP} = \frac{(a-b)\sin 2\varphi}{a+b-(a-b)\cos 2\varphi} = \operatorname{tang}\delta,$$

donc

$$MOP = \delta.$$

Cette construction, bien simple, permet de suivre avec une extrême facilité les variations de δ répondant aux variations de φ.

Le maximum de δ est évidemment donné par le point M_1, tel que OM_1 soit tangente au cercle C. Pour ce point, on a, CM_1 étant perpendiculaire à OM_1,

$$\sin\delta_1 = \frac{CM_1}{OC} = \frac{a-b}{a+b}.$$

C'est la formule (3″) de notre Note, obtenue ici sans calcul.

On voit, en outre, que *la déviation maxima est complémentaire du double de l'anomalie excentrique correspondante.*

NOTE SUR LA THÉORIE DES SÉRIES;

PAR M. E. CAHEN,

Professeur de Mathématiques spéciales à l'École de Cluny.

Dans une série à termes positifs $u_0, u_1, \ldots, u_n$, supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, lorsque n croît indéfiniment, tende vers 1 par valeurs inférieures à 1.

Duhamel a donné un procédé pour décider de la convergence ou de la divergence d'une telle série : on pose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$, et l'on cherche la limite de $n\alpha_n$.

Si cette limite est >1, la série est convergente;

Si cette limite est <1, la série est divergente;

Si cette limite est $=1$, la règle de Duhamel ne s'applique pas.

Voici, dans ce cas, une règle qui complète celle de Duhamel.

On pose $n\alpha_n = 1 + \beta_n$; β_n a pour limite 0, *et l'on cherche la limite de $n\beta_n$. Si cette limite est différente de $+\infty$, la série est divergente.*

Soient, en effet, l cette limite et k un nombre $>l$. On aura, pour des valeurs suffisamment grandes de n,

$$n\beta_n < k, \qquad \text{d'où} \qquad \beta_n < \frac{k}{n}.$$

Par suite

$$1 + \beta_n \qquad \text{ou} \qquad n\alpha_n < 1 + \frac{k}{n}$$

et

$$\alpha_n < \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}.$$

De là on tire

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}},$$

a fortiori

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} + \ldots}$$

ou

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n\left(1 - \frac{k}{n}\right)}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n-k}{n-k+1}.$$

Si l'on considère la série dont le terme général $v_n = \frac{1}{n-k}$, cette série est, comme on sait, divergente.

Donc, puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$, la série $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ est aussi divergente.

Premier exemple. — Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se mette sous la forme d'une fraction rationnelle en n, telle que

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + a n^{\lambda-1} + b n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + A n^{\lambda-1} + B n^{\lambda-2} + \ldots},$$

expression qui tend vers 1 lorsque n croît indéfiniment. On a, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n^\lambda + A n^{\lambda-1} + B n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + a n^{\lambda-1} + b n^{\lambda-2} + \ldots} - 1 \\ &= \frac{(A-a) n^{\lambda-1} + (B-b) n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + a n^{\lambda-1} + b n^{\lambda-2} + \ldots}, \\ n\alpha_n &= \frac{(A-a) n^\lambda + (B-b) n^{\lambda-1} + \ldots}{n^\lambda + a n^{\lambda-1} + b n^{\lambda-2} + \ldots}; \end{aligned}$$

$n\alpha_n$ tend vers $A - a$.

La règle de Duhamel montre que :

Si $A - a > 1$, la série est convergente ;

Si $A - a < 1$, la série est divergente ;

Si $A - a = 1$, on a

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{(B-b) n^{\lambda-1} + \ldots}{n^\lambda + \ldots}, \\ n\beta_n &= \frac{(B-b) n^\lambda + \ldots}{n^\lambda + \ldots}. \end{aligned}$$

La limite de $n\beta_n$ est $B - b$. Donc la série est divergente. Cette règle est de Gauss.

Second exemple. — Soit la série dont le terme gé-

néral est

$$u_{n+1} = (2 - \sqrt{e})(2 - \sqrt[3]{e})\ldots(2 - \sqrt[n]{e}),$$

ce terme général tend vers 0. En effet, on a

$$\sqrt[n]{e} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Donc

$$2 - \sqrt[n]{e} < 1 - \frac{1}{n};$$

le terme général est donc

$$< \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{n},$$

il tend vers 0.

Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt[n]{e}$, il tend vers 1;

$$\alpha_n = \frac{1}{2 - \sqrt[n]{e}} - 1 = \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{2 - \sqrt[n]{e}},$$

$$n\alpha_n = \frac{n(\sqrt[n]{e} - 1)}{2 - \sqrt[n]{e}} = \frac{1 + \dfrac{1}{1.2}\dfrac{1}{n} + \ldots}{1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1.2}\dfrac{1}{n^2} - \ldots},$$

$n\alpha_n$ tend vers 1;

$$\beta_n = \frac{1 + \dfrac{1}{1.2}\dfrac{1}{n} + \ldots}{1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1.2}\dfrac{1}{n^2} - \ldots} - 1 = \frac{\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{n} + \ldots}{1 - \dfrac{1}{n} - \ldots},$$

$$n\beta_n = \frac{\dfrac{3}{2} + \ldots}{1 - \ldots},$$

$n\beta_n$ tend vers $\frac{3}{2}$. Donc la série est divergente.

CIRCONFÉRENCE TANGENTE A TROIS CIRCONFÉRENCES ET SPHÈRE TANGENTE A QUATRE SPHÈRES;

Par M. A. A.

I. Soient A, B, C les trois circonférences données; considérons les sphères dont ces circonférences sont les grands cercles.

Soit Ω une sphère tangente à ces trois sphères; transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, le *pôle* étant un point quelconque de l'axe radical et la *puissance* étant la puissance elle-même du pôle par rapport aux trois sphères.

Ω se transforme suivant une sphère Ω′ tangente aux trois sphères données et les nouveaux points de contact sont les transformés des anciens.

Donc, étant donnée une sphère particulière tangente aux trois sphères, nous pourrons en trouver une infinité par cette transformation. Comme sphère particulière nous prendrons un plan tangent aux sphères, plan que nous pouvons construire facilement, car sa trace sur le plan des trois centres est un axe de similitude des circonférences données A, B, C.

De tout ce qui précède nous déduisons que :

Les points de contact d'une série de sphères tangentes à trois sphères sont respectivement sur trois plans passant par l'axe radical et par la polaire, par rapport à chacune des sphères, d'un axe de similitude des circonférences sections des sphères par le plan des trois centres.

D'où la construction de Gergonne pour la solution de notre premier problème :

Déterminez le centre radical S *et un axe de similitude des trois circonférences* A, B, C; *prenez, par rapport à chacune d'elles, les pôles* p, q, r *de cet axe; les droites* Sp, Sq, Sr *rencontrent respectivement* A, B, C *aux points de contact cherchés.*

II. Soient A, B, C, D les quatre sphères données. Appliquant la remarque ci-dessus à trois de ces sphères, on trouve immédiatement que les points de contact de la sphère demandée sont sur quatre droites issues du centre radical et passant par les points d'intersection des polaires, par rapport à chaque sphère, des axes de similitude des sphères prises trois à trois (*ces points sont précisément les pôles des plans de similitude*).

D'où la construction suivante :

Déterminez le centre radical S *et un plan de similitude des quatre sphères* A, B, C, D; *prenez, par rapport à chacune d'elles, les pôles* p, q, r, t *de ce plan; les droites* Sp, Sq, Sr, St *rencontrent respectivement* A, B, C, D *aux points de contact cherchés.*

Comme il y a huit plans de similitude, il y a en tout seize solutions.

Il y a analogie complète entre les deux constructions.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les Éléments de la Géométrie ciné-

matique; par M. *A. Mannheim,* colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1886. Gr. in-8°, avec 256 figures dans le texte. Prix : 17^{fr}.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR.

Depuis la première Édition de cet Ouvrage, j'ai publié en 1882, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* deux articles (¹) relatifs à l'enseignement de la Géométrie descriptive.

J'ai proposé d'introduire dans les Éléments les procédés pratiques employés par les Ingénieurs : les plans de projection, et par suite la ligne de terre, n'interviennent que par leurs directions. Ce système a été immédiatement adopté dans plusieurs lycées de Paris, en Russie, en Belgique, en Portugal, etc., et je l'ai naturellement suivi dans cette nouvelle Édition.

Le plan général de mon Cours ressort clairement de la Table des matières. La *Géométrie cinématique* (²) est exposée en plusieurs Parties donnant lieu chacune à un certain nombre d'applications. C'est ainsi, par exemple, qu'après avoir étudié

(¹) Ces articles ont été réunis dans une brochure intitulée : *Premiers éléments de la Géométrie descriptive.* Cette brochure a été traduite en langue russe par M. le professeur Liguine, de l'Université d'Odessa.

(²) Lorsqu'a paru la première Édition de cet Ouvrage, M. Resal a inséré dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* une *Note sur les différentes branches de la Cinématique,* dont je citerai ce passage : « M. Mannheim, par de nombreuses et intéres-
» santes applications, a montré que l'emploi des propositions élé-
» mentaires de la Géométrie cinématique constitue une méthode
» nouvelle d'une véritable originalité.

» La Géométrie cinématique de M. Mannheim n'est pas simple-
» ment la partie géométrique de la Cinématique telle qu'on l'étudiait
» jusqu'ici. Elle considère en outre les figures mobiles de formes
» variables, comprend aussi la recherche des propriétés relatives aux
» figures de forme invariable pour lesquelles le déplacement n'est pas
» absolument défini....

» Comme dans cette courte Note je n'ai eu pour objet que de fixer
» quelques définitions, je n'insiste pas sur la valeur du Livre de
» M. Mannheim. Qu'il me soit pourtant permis de dire que, à mon
» point de vue, ce beau Travail établit un point de repère important
» dans l'histoire de la Science. »

le déplacement d'un plan dans l'espace, j'arrive à construire la normale à la surface de l'onde et, par suite, je trouve les points coniques et les plans tangents singuliers de cette surface.

On doit remarquer que j'ai conservé à la *Géométrie cinématique* le rôle prépondérant que je lui avais donné et qui m'avait permis, avantage très précieux, d'apporter l'*unité de méthode dans les démonstrations*.

Cette Édition contient de nouvelles applications de *Géométrie cinématique* extraites, comme presque tous les *Suppléments*, de mes travaux personnels; elle renferme en outre des modifications nombreuses et d'importantes additions.

Ainsi, j'ai ajouté l'étude du conoïde de Plücker, cette surface du troisième ordre si utile dans la théorie des déplacements d'une figure assujettie à quatre conditions; j'ai introduit dans la théorie de la courbure des surfaces le point que j'ai appelé *point représentatif* d'un élément de surface réglée, dont le premier j'ai fait usage, et qui m'a permis d'exposer très simplement cette théorie. Etc.

Comme on le voit par le titre de mon Cours, les leçons proprement dites comprennent les *Éléments de la Géométrie cinématique*; mais ce Livre, dans son ensemble, peut tenir lieu d'un Ouvrage spécial de *Géométrie cinématique*, grâce à ses nombreux *Suppléments* et aux indications bibliographiques qui sont données lorsque les questions traitées, ou à étudier, auraient exigé trop de développements.

Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré a une inconnue, à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et au baccalauréat de l'Enseignement spécial, des candidats aux Écoles du Gouvernement et des élèves des Écoles normales; par M. *A. Tartinville*, ancien élève de l'École Normale supérieure, agrégé des Sciences mathématiques, Professeur au lycée Saint-Louis. Paris, librairie du *Journal de Mathématiques élémentaires*; 1886. Grand in-4° de 214 pages. Prix : 3fr,50.

En parcourant cet Ouvrage, on voit que le principal but de l'Auteur a été d'amener graduellement l'élève à la discussion

complète des problèmes du second degré. Toutes les difficultés que l'on peut rencontrer ont été prévues et de nombreuses applications, choisies avec soin, facilitent l'intelligence des méthodes. Quoique l'Auteur n'ait pas la prétention d'avoir fait partout du nouveau, cependant certains Chapitres lui sont propres. Citons, notamment, le Chapitre *sur la comparaison des racines de deux équations du second degré, non résolues.*

Théorie et construction de l'appareil hélicoïdal des arches biaises; par *Jules de la Gournerie,* rédigées par M. *Ernest Lebon.* Texte et planches. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 3fr.

Cet important travail, destiné à former un Supplément au *Traité de Stéréotomie* de Leroy, est la rédaction du Cours sur les Arches biaises hélicoïdales, professé par Jules de la Gournerie à l'École Polytechnique et au Conservatoire des Arts et Métiers. M. Ernest Lebon, d'après le désir exprimé par M. de la Gournerie, a rédigé les idées émises par ce savant, et a composé les figures de deux belles Planches qui accompagnent l'Ouvrage. On sait que M. E. Lebon a été remplaçant de M. J. de la Gournerie au Conservatoire des Arts et Métiers, et qu'il y a enseigné la théorie et la construction des arches biaises. Dans l'Ouvrage que M. Gauthier-Villars vient d'éditer avec luxe, rien de ce qui est nécessaire à l'appareilleur n'a été omis, et la partie théorique est développée avec des démonstrations simples; les épures sont dessinées à une grande échelle, avec netteté et clarté, et contiennent tous les détails pratiques. Les tracés sont ceux qu'ont adoptés les ingénieurs les plus autorisés, et les noms de leurs auteurs sont toujours cités.

Pour donner une idée de la valeur de cet Ouvrage, nous indiquons ses principales divisions : Principe de la direction des pressions. — Théorie de l'appareil hélicoïdal. — Appareil hélicoïdal exact, tracé de l'épure, taille par équarrissement et taille directe. — Appareil hélicoïdal simplifié, tracé de l'épure et taille.

Elementi di Geometria projettiva, di *G.-F. Monteverde,* professore straordinario nella R. Università di

Genova. Texte et figures. Gênes, L. Beuf; 1886. Prix : 10 francs.

Cet Ouvrage, destiné à la jeunesse des écoles, est divisé en trois Livres.

Dans le premier, l'Auteur expose l'objet de la Géométrie projective, la règle des signes, les formes géométriques fondamentales, le principe de dualité, la théorie du rapport anharmonique et les propriétés du quadrilatère complet.

Dans le deuxième, l'Auteur donne les propriétés projectives des figures de l'espace, la théorie de l'homographie et celle de l'involution.

Le troisième renferme la classification des coniques, les théorèmes généraux, la génération et la construction des coniques satisfaisant à des conditions données, la théorie des quadriques, la résolution des problèmes qui se ramènent au second degré. Les deux derniers Chapitres du Livre sont relatifs à l'introduction des éléments imaginaires.

L'Ouvrage est facile à lire et l'exécution typographique en est soignée; on peut seulement regretter que les figures aient été réunies dans un Atlas séparé, au lieu d'être intercalées dans le texte.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Annuario della R. Università degli studi di Padova per l'anno scolastico 1885-86. Orazione inaugurale. Padova, tipografia Gio. Batt. Randi; 1886.

Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emmanuele, di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia. N° 4. Luglio-Agosto 1886. Roma, Forzani e C^{a}; 1886.

RÉSOLUTION, EN NOMBRES ENTIERS ET SOUS SA FORME LA PLUS GÉNÉRALE, DE L'ÉQUATION CUBIQUE, HOMOGÈNE, A TROIS INCONNUES [1];

Par M. DESBOVES.

1. *Notations.* — L'équation générale peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ + eYZ^2 \\ \qquad + fZY^2 + gXZ^2 + hZX^2 + kXY^2 + lYX^2 = 0\,; \end{array}\right.$$

(x, y, z) en étant une solution quelconque, on représentera le résultat de la substitution de x, y, z dans son premier membre par $F(x, y, z)$ ou plus simplement F; nous poserons aussi, comme Cauchy,

$$\frac{dF}{dx} = \varphi, \qquad \frac{dF}{dy} = \chi, \qquad \frac{dF}{dz} = \psi.$$

De plus, si l'on remplace dans F, φ, χ et ψ, les variables x, y, z respectivement : 1° par $0, \psi, -\chi$; 2° par $-\psi, 0, \varphi$; 3° par $\chi, -\varphi, 0$, les résultats correspondants seront représentés par $F_1, \varphi_1, \chi_1, \psi_1$; $F_2, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$; $F_3, \varphi_3, \chi_3, \psi_3$. On pose encore

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\psi^2 - \frac{2\,d^2F}{dy\,dz}\chi\psi + \frac{d^2F}{dz^2}\chi^2\right),$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\psi^2 - \frac{2\,d^2F}{dx\,dz}\varphi\psi + \frac{d^2F}{dz^2}\varphi^2\right),$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\chi^2 - \frac{2\,d^2F}{dx\,dy}\varphi\chi + \frac{d^2F}{dy^2}\varphi^2\right).$$

---

[1] Cet article peut être considéré comme un complément du Mémoire de Cauchy sur la même question : seulement, pour que le sujet fût complètement traité, j'ai reproduit deux systèmes de formules trouvées par l'illustre géomètre, mais en simplifiant les démonstrations.

2. Nous allons d'abord, comme le fait Cauchy, résoudre le problème suivant :

Problème I. — *Connaissant une première solution* (x, y, z) *de l'équation* (1), *trouver des formules qui fassent connaître une seconde solution* (X, Y, Z).

ρ, u, v, t étant des variables quelconques, on pose

$$(2) \qquad X = x\rho + u, \qquad Y = y\rho + v, \qquad Z = z\rho + t.$$

Alors, si l'on substitue dans l'équation (1) pour X, Y, Z les expressions précédentes et que l'on développe le premier membre, d'après le théorème de Taylor, en considérant u, v, t comme les accroissements, on a

$$\begin{aligned} F(x, y, z)\rho^3 &+ \left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)\rho^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^2 + F(u, v, t) = 0 \end{aligned}$$

ou, comme (x, y, z) est une solution de l'équation (1),

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)\rho^2 \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^2\rho + F(u, v, t) = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut réduire l'équation précédente à une équation du premier degré en ρ en égalant à zéro le coefficient de ρ^2, ce qui permet d'exprimer l'une des variables u, v, t en fonction des deux autres; mais le calcul peut être simplifié en réduisant les trois variables à deux seulement, comme je l'ai fait pour les équations du second degré [1]. Supposons, par exemple, $u = 0$: alors l'équa-

---

[1] *Voyez* le Mémoire inséré dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. III, 1884).

tion (3) devient

$$(4)\qquad \left(\frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)\rho^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^2\rho + F(o, v, t) = o.$$

Or, en égalant à zéro le coefficient de ρ^2 dans l'équation précédente, puis la résolvant par rapport à ρ, on a

$$t = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}}v, \qquad \rho = -\frac{F(o, v, t)}{\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^2},$$

et, en remplaçant dans la seconde des équations précédentes t par sa valeur tirée de la première, si l'on se sert des notations (1), on obtient

$$\rho = -\frac{vF_1}{\frac{1}{2}\psi\left(\frac{d\chi}{dy}\psi^2 - 2\frac{d\chi}{dz}\chi\psi + \frac{d\psi}{dy}\chi^2\right)}$$

ou encore

$$\rho = -\frac{vF_1}{\psi\lambda}.$$

Si l'on substitue maintenant cette valeur de ρ dans les formules (2) où l'on a fait $u = o$, il vient

$$(5)\qquad X = xF_1, \qquad Y = yF_1 - \psi\lambda, \qquad Z = zF_1 - \chi\lambda.$$

Si l'on fait ensuite successivement $v = o$ et $t = o$ dans les formules (2), on aura deux systèmes de formules qui donneront les mêmes solutions que le premier; ce sont les suivantes :

$$(6)\qquad X = xF_2 - \psi\mu, \qquad Y = yF_2, \qquad Z = zF_2 - \varphi\mu;$$

$$(7)\qquad X = xF_3 - \chi\nu, \qquad Y = yF_3 - \varphi\nu, \qquad Z = zF_3.$$

Remarque I. — On a les identités

$$(8)\qquad \begin{cases} x\varphi_1 + y\chi_1 + z\psi_1 = \lambda, \\ x\varphi_2 + y\chi_2 + z\psi_2 = \mu, \\ x\varphi^3 + y\chi^3 + z\psi^3 = \nu. \end{cases}$$

En effet, x, y, z étant trois variables quelconques et u, v, t trois autres variables remplaçant, respectivement, dans F, x, y, z, on a identiquement

$$x\frac{dF}{du}+y\frac{dF}{dv}+z\frac{dF}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u+\frac{dF}{dy}v+\frac{dF}{dz}t\right)^{(2)}.$$

Or, si dans cette identité on remplace u, v, t respectivement par o, $\frac{dF}{dz}$, $-\frac{dF}{dy}$, on a la première des égalités (8); les deux autres se démontrent de même. On peut donc dans les formules (5), (6) et (7) remplacer λ, μ, ν par les premiers membres des équations (8). On obtient ainsi les formules de Cauchy, telles qu'il les a données; mais, comme on le verra par la suite, la forme que nous avons adoptée est préférable.

Remarque II. — (x, y, z) étant une première solution de l'équation (1), une seconde solution (X, Y, Z) satisfait à l'équation

$$X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}=0. \tag{9}$$

En effet, si l'on multiplie les deux membres des équations (2), respectivement par $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$, il vient

$$X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}$$
$$=\left(x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}\right)\rho+u\frac{dF}{dx}+v\frac{dF}{dy}+t\frac{dF}{dz}.$$

Or le premier terme du second membre est nul à cause de l'homogénéité de F, et le second terme est aussi nul parce que le coefficient de ρ^2 dans l'équation (3) est égal à zéro, que l'une des variables u, v, t soit ou non égale à zéro.

3. Les seconds membres des équations (5), (6) et (7)

sont des polynômes du septième degré en x, y, z; mais nous allons démontrer qu'on peut remplacer les trois systèmes par un système équivalent qui donne X, Y, Z exprimés par des polynômes du quatrième degré en x, y, z. Pour le faire voir, nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Théorème I. — *Les polynômes* F_1, F_2, F_3, *si l'on tient compte de l'équation* (1), *sont respectivement divisibles par* x^2, y^2, z^2, *et il en est de même de* λ, μ, ν.

Je dis d'abord que l'on a les six relations

$$(10)\quad \begin{cases} y^3 F_1 - x^3 F_2 = x^2 \psi\mu, \\ z^3 F_2 - y^3 F_3 = y^2 \varphi\nu, \\ x^3 F_3 - z^3 F_1 = z^2 \chi\lambda, \\ y^3 F_1 - x^3 F_2 = y^2 \psi\lambda, \\ z^3 F_2 - y^3 F_3 = z^2 \varphi\mu, \\ x^3 F_3 - z^3 F_1 = x^2 \chi\nu. \end{cases}$$

Démontrons, par exemple, la première. On a

$$y^3 F_1 = F(x\psi - x\psi, y\varphi, -y\chi) = F(x\psi - x\psi, y\varphi, z\psi + x\varphi),$$

et, si l'on développe le second membre d'après le théorème de Taylor, en considérant $-x\psi$ et $x\varphi$ comme les accroissements, il vient

$$y^3 F_1 = \psi^3 F - x\psi^3 \varphi + x\psi^3 \varphi + x^2 \psi\mu + x^3 F_2.$$

Comme la somme des trois premiers termes du second membre est nulle, la première relation est démontrée. Les autres se démontreraient de même. Cela posé, on voit que les trois premières relations (10) expriment que F_1, F_2, F_3 sont respectivement divisibles par x^2, y^2, z^2. D'autre part, si l'on égale les seconds membres de celles des équations (10) dont les premiers sont identiques,

on a

$$x^2\mu = y^2\lambda, \qquad y^2\nu = z^2\mu, \qquad z^2\lambda = x^2\nu.$$

Or ces équations expriment que λ, μ, ν sont respectivement divisibles par x^2, y^2, z^2 et que les trois quotients sont égaux. Alors, en désignant par π le quotient commun, on a

$$(11) \qquad \lambda = x^2\pi, \qquad \mu = y^2\pi, \qquad \nu = z^2\pi.$$

Remarque. — En tenant compte des relations (11), on voit que les équations (10) se réduisent à deux, aux deux suivantes, par exemple,

$$(12) \quad y^3F_1 - x^3F_2 = x^2y^2\pi\psi, \qquad x^3F_3 - z^3F_1 = x^2z^2\pi\chi.$$

En effet, si l'on remplace dans les équations (10) λ, μ, ν par les valeurs $x^2\pi$, $y^2\pi$, $z^2\pi$, on voit d'abord que ces équations se réduisent aux trois premières dont deux sont les équations (12) et la troisième

$$(13) \qquad z^3F_2 - y^3F_3 = y^2z^2\pi\varphi.$$

Mais cette dernière est la conséquence des deux autres; car, si l'on élimine F_1 entre les équations (12), il vient

$$-z^3x^3F_2 + x^3y^3F_3 = x^2y^2z^2(y\chi + z\psi) = -x^3y^2z^2\varphi,$$

et, en divisant par x^3 les deux membres, on retombe sur l'équation (13). Il est aisé maintenant d'arriver aux formules demandées. Remarquons d'abord que les formules (5), après qu'on y a remplacé λ par $x^2\pi$, peuvent s'écrire

$$(14) \qquad \begin{cases} X = x^3\dfrac{F_1}{x^2}, \\ Y = x^2\left(y\dfrac{F_1}{x^2} - \pi\psi\right), \\ Z = x^2\left(z\dfrac{F_1}{x^2} + \pi\chi\right). \end{cases}$$

et les formules (12)

$$(15)\qquad y\frac{F_1}{x^2} - \pi\psi = x\frac{F_2}{y^2}, \qquad z\frac{F_1}{x^2} - \pi\chi = x\frac{F_3}{z^2}.$$

Si l'on remplace enfin dans les deux dernières équations (14) les quantités entre parenthèses par les valeurs que donnent les équations (15), après avoir supprimé un facteur commun x^3, on a

$$(16)\qquad X = \frac{F_1}{x^2}, \qquad Y = \frac{F_2}{y^2}, \qquad Z = \frac{F_3}{z^2};$$

ce sont les formules demandées qui sont du quatrième degré, comme nous l'avons annoncé, puisque F_1, F_2, F_3 sont des polynômes du sixième degré en x, y, z.

Cauchy est arrivé aux formules

$$\frac{x^2 X}{F_1} = \frac{y^2 Y}{F_2} = \frac{z^2 Z}{F_3},$$

mais, comme il ne les a pas mises sous la forme (16), il paraît probable qu'il ne connaissait pas le théorème I.

4. *Application des formules* (16). — Soit d'abord l'équation

$$(17)\qquad aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} F_1 &= b(3cz^2 - dxy)^3 - c(3by^2 - dxz)^3 \\ &= 27bc(cz^3 - by^3)(by^3 + cz^3 + dxyz) - d^2x^3 \\ &\quad - (by^3 - cz^3)(27abc + d^3)x^3; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{F_1}{x^2} = (27abc + d^3)x(by^3 - cz^3).$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{F_2}{y^2} = (27\,abc + d^3)\,y\,(c\,z^3 - a\,x^3),$$

$$\frac{F_3}{z^2} = (27\,abc + d^3)\,z\,(a\,x^3 - b\,y^3).$$

Appliquant alors les formules (16) et supprimant le facteur $27abc + d^3$, on a

$$(18) \qquad \begin{cases} X = x(by^3 - cz^3), \\ Y = y(cz^3 - ax^3), \\ Z = z(ax^3 - by^3). \end{cases}$$

Soit encore l'équation

$$(19) \qquad aX^3 + cZ^3 + kXY^2 = 0.$$

On obtient les formules

$$(20) \qquad \begin{cases} X = 8k^2xy^3, \\ Y = 27a^2x^4 + 18akx^2y^2 - k^2y^4, \\ Z = 2kyz(9ax^2 + ky^2). \end{cases}$$

5. *Nouvelle méthode pour arriver directement aux formules* (16). — Cette méthode repose sur le théorème suivant :

Théorème II. — (x, y, z) *est une solution double du système des deux équations* (1) *et* (9) *dans lesquelles* X, Y, Z *sont considérés comme les inconnues.*

On entend par là que, si l'on élimine une quelconque des trois variables X, Y, Z entre les deux équations (1) et (9), l'équation résultant de l'élimination, qui contient une seule inconnue, l'un des rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, $\frac{Y}{Z}$, admet la solution double correspondante $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{z}$. Supposons, par exemple, qu'on élimine Z entre les

équations (1) et (9), je dis que l'équation en $\frac{Y}{X}$ admet $\frac{y}{x}$ comme racine double. En effet, si l'on désigne par m le rapport $\frac{Y}{X}$ et qu'on élimine $\frac{Z}{X}$ entre les équations (1) et (9), on a

$$F(\psi, m\psi, -m\chi - \varphi) = 0,$$

et, si l'on développe le premier membre d'après le théorème de Taylor, en considérant $-\varphi$ comme l'accroissement, il vient

$$F(\psi, m\psi, -m\chi) - \psi(\psi, m\psi, -m\chi)\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dz}(\psi, m\psi, -m\chi)\varphi^2 - \frac{1}{6}\frac{d^2\psi}{dz^2}\varphi^3 = 0\ (^1).$$

Ordonnant ensuite par rapport aux puissances décroissantes de m, on a

(21) $$F_1 m^3 + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)m^2 + (\psi\chi_2 - \chi\psi_2)m - F_2 = 0.$$

Or la première dérivée du premier membre de cette équation est $3F_1 m^2 + 2(\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)m + \psi\chi_2 - \chi\psi_2$, et, si l'on y remplace $\psi\chi_2 - \chi\psi_2$ par sa valeur tirée de l'équation (21), on a

$$\frac{2F_1 m^3 + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)m^2 + F_2}{m},$$

ou encore, en substituant $\frac{y}{x}$ à m et à $x^3 F_2$ sa valeur tirée de la première des équations (12),

$$\frac{y}{x^2}[3y F_1 - x^2\pi\psi + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)x].$$

---

(1) $\psi(\psi, m\psi, -m\chi)$, $\frac{d\psi}{dz}(\psi, m\psi, -m\chi)$ représentent respectivement les résultats de la substitution, dans ψ et $\frac{d\psi}{dz}$, de ψ, $m\psi$, $-m\chi$ respectivement, à x, y, z.

Il faut donc prouver que l'on a

$$(22) \qquad 3yF_1 - x^2\psi\pi + x(\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1) = 0.$$

Or, c'est ce que l'on voit immédiatement en remplaçant $3F_1$ par la quantité $\psi\chi_1 - \chi\psi_1$ qui lui est identique, puisque F_1 est une fonction homogène de o, ψ, $-\chi$.

En effet, l'équation (22) peut alors s'écrire

$$\psi(x\varphi_1 + \psi\chi_1 - x^2\pi) - \psi_1(x\varphi + y\chi) = 0,$$

et, comme la première des équations (8), dans laquelle on remplace λ par $x^2\pi$, montre que $x\varphi_1 + y\chi_1 - x^2\pi$ est une quantité égale à $-z\psi_1$ et que d'ailleurs $x\varphi + y\chi$ peut être remplacée par $-z\psi$, on a bien une identité. Le théorème II étant démontré et (x, y, z) désignant comme précédemment la solution donnée, et (X, Y, Z) la solution que l'on veut obtenir, nous identifierons le premier membre de l'équation (21) divisé par F_1 et celui de l'équation

$$\left(m - \frac{y}{x}\right)^2 \left(m - \frac{Y}{X}\right) = 0,$$

ou

$$(23) \qquad m^3 - \left(\frac{Y}{X} - \frac{2y}{x}\right)m^2 + \left(\frac{2y}{x}\,\frac{Y}{X} + \frac{y^2}{x^2}\right)m - \frac{y^2}{x^2}\,\frac{Y}{X} = 0.$$

Or, si l'on identifie les deux derniers termes des équations (21) et (23), on a $\frac{x^2X}{F_1} = \frac{y^2Y}{F_2}$, et si, au lieu d'éliminer Z entre les équations (1) et (9), on avait éliminé Y, on aurait trouvé de même $\frac{x^2X}{F_1} = \frac{z^2Z}{F_3}$ On a donc

$$\frac{x^2X}{F_1} = \frac{y^2Y}{F_2} = \frac{z^2Z}{F_3},$$

d'où l'on déduit les formules (16).

Remarque. — On pourra obtenir les valeurs de $\frac{Y}{X}$ et $\frac{Z}{X}$ en résolvant deux équations du premier degré à une

inconnue. En effet, après avoir supprimé la racine double $\frac{y}{x}$ dans l'équation (23), on aura une équation de premier degré qui donnera $\frac{Y}{X}$. On aura ensuite $\frac{Z}{X}$ en résolvant l'équation (9) après y avoir remplacé $\frac{Y}{X}$ par la valeur obtenue. Soit, par exemple, l'équation

$$X^3 + Y^3 - 7Z^3 = 0.$$

Prenons comme solution donnée la solution (2, —1, 1), l'équation (21) est alors $5m^3 + 16m^2 + 4m - 16 = 0$, et, en divisant le premier membre de cette équation par $m^2 + 4m + 4$, qui est le carré de $(m + 2)$, on a à résoudre l'équation $5m - 4 = 0$, d'où $\frac{X}{Y} = \frac{4}{5}$. On a ensuite

$$\frac{Z}{Y} = \frac{3}{5},$$

et l'on obtient finalement la solution (4, 5, 3).

6. *Indication de la marche à suivre pour calculer* π, $\frac{F_1}{x^2}$, $\frac{F_2}{y^2}$, $\frac{F_3}{z^2}$. — Considérons d'abord π. On a

$$2\pi = \frac{2\lambda}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[\psi\left(\frac{d\chi}{dy}\psi - \frac{d\psi}{dz}\chi\right) + \chi\left(\chi\frac{d\psi}{dz} - \psi\frac{d\chi}{dz}\right)\right].$$

On détermine d'abord les deux différences $\frac{d\chi}{dy}\psi - \frac{d\chi}{dz}\chi$, $\chi\frac{d\psi}{dz} - \psi\frac{d\chi}{dz}$ et on les multiplie respectivement par ψ et χ. Le développement contient des termes en x^3, x^2, x et des termes indépendants de x. Pour vérifier que 2λ est divisible par x^2 et calculer π en même temps, on prouve d'abord, en tenant compte de l'équation (1), que le polynôme indépendant de x peut être remplacé par un polynôme divisible par x, et l'on ajoute au quotient de ce polynôme par x celui qui est obtenu en divisant

par x les termes qui contiennent x à la première puissance. Il ne reste plus alors qu'à montrer que le polynôme ainsi formé est divisible par x. Le calcul s'achève ensuite aisément. J'indiquerai ici seulement la première partie du calcul.

En désignant par A la somme des termes indépendants de x, on a

$$A = \left\{ \begin{array}{r|r|r|r|l} 18fc^2 & z^5 - 54be^2 & yz^4 + 72bce & y^2z^3 + 72bcf & y^3z^2 \\ -6ce^2 & -12cef & -12e^2f & -12ef^2 & \\ & -6e^3 & -12cf^2 & +12e^2b & \\ \end{array} \right.$$
$$\begin{array}{r|r|l} -12bef & y^4z + 18b^2e & y^5. \\ -6f^3 & -6bf^2 & \\ -54b^2c & & \end{array}$$

En mettant d'abord $54bcyz$ en facteur dans quatre termes, on a

$$54\,bcyz(cz^3 + eyz^2 + fzy^2 + by^3),$$

ou, en remplaçant le second facteur par sa valeur tirée de l'équation (1),

$$-54bcxyz(ax^2 + ky^2 + lxy + gz^2 + hxz + dyz).$$

On continue de grouper les termes quatre à quatre et l'on opère comme pour le premier groupe. On trouve ainsi que le polynôme A peut être remplacé par un polynôme divisible par x. Alors, si l'on supprime le facteur x, on voit que le résultat demandé est le produit des deux polynômes

$$ax^2 + ky^2 + lxy + gz^2 + hxz + dyz,$$
$$\begin{array}{r|r|r|l} 6f^2 & y^2 + 6ef & yz - 6e^2 & z^2. \\ -18bc & -54bc & -18cf^2 & \end{array}$$

Calcul de $\frac{F_1}{x^2}, \frac{F_2}{y^2}, \frac{F_3}{z^2}$. — On procédera comme pour le calcul de π, c'est-à-dire que l'on commencera par faire

des groupements de quatre termes ayant un facteur commun.

7. Cherchons maintenant à quelle condition le système des équations (1) et (9) a une racine triple; c'est ce qu'indique le théorème suivant :

Théorème III. — *Pour que les équations résultant de l'élimination d'une des variables* X, Y, Z *entre les équations* (1) *et* (9) *aient chacune une racine triple, il faut et il suffit que la condition* $\pi = 0$ *soit remplie.* (On suppose qu'aucune des trois variables x, y, z n'est nulle.)

Si l'on considère, par exemple, l'équation (21) résultant de l'élimination de Z entre (1) et (9), cette équation, qui a déjà la racine double $\frac{y}{x}$, admettra la même racine comme triple, si la seconde dérivée de son premier membre est nulle, c'est-à-dire si l'on a

$$3F_1 m + \psi\varphi_1 - \varphi\psi_1 = 0,$$

ou, en remplaçant m par $\frac{y}{x}$,

$$3F_1 y + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)x = 0.$$

Or l'équation (22, n° 5) montre qu'alors on doit avoir $x^2\pi\psi = 0$; on obtiendrait de même $y^2\pi\varphi = 0$, $z^2\pi\chi = 0$. Il est d'abord évident que la condition $\pi = 0$ est suffisante; elle est de plus nécessaire. En effet, si elle n'était pas remplie, comme x, y, z ne sont pas nuls, on aurait $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$, et, par suite, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ ou $x^2\pi = 0$, $y^2\pi = 0$, $z^2\pi = 0$, et, comme x, y, z ne sont pas nuls, on retombe nécessairement sur la condition unique $\pi = 0$.

8. Nous allons maintenant chercher à quelle condi-

tion les formules (5) et les formules équivalentes sont inapplicables, et, à cet effet, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème IV. — *Pour que les formules* (5) *et les formules équivalentes* (6), (7) *et* (16) *soient inapplicables, c'est-à-dire pour que la solution* (X, Y, Z) *obtenue par ces formules soit identique à la solution* (x, y, z), *il faut et il suffit que l'on ait* $\pi = 0$. (On suppose ici, comme pour le théorème IV, qu'aucune des variables x, y, z n'est nulle.)

Considérons, par exemple, les formules (5). Si l'on y remplace F_1 par $x^2 Q_1$ et λ par πx^2, elles deviennent, après la suppression du facteur commun x,

$$X = x Q_1, \qquad Y = y Q_1 - \psi\pi, \qquad Z = z Q_1 + \chi\pi.$$

Il est d'abord évident que la condition $\pi = 0$ est suffisante, puisque, si elle est remplie, les formules précédentes donnent

$$X = x Q_1, \qquad Y = y Q_1, \qquad Z = z Q_1.$$

Je dis maintenant qu'elle est nécessaire. En effet, si l'on n'avait pas $\pi = 0$, on devrait avoir $\psi = 0$, $\chi = 0$, ce qui entraîne $\lambda = 0$ ou $x^2\pi = 0$. Mais, comme x n'est pas nul, on a nécessairement $\pi = 0$.

On serait encore arrivé à la même conclusion en exprimant que chacune des équations résultant de l'élimination de l'une des variables X, Y, Z entre les équations (1) et (9) a une racine triple (th. IV, n° 8). En effet, l'équation (21) et les autres équations analogues ne peuvent donner que la solution connue (x, y, z).

9. *Interprétation de la condition* $\pi = 0$. — Nous considérerons deux cas particuliers. Soit l'équation

$$(24) \qquad aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ + kXYZ = 0;$$

on a

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi = (27abc + d^3)xyz \\ &\quad - k(9acx^2z + d^2xy^2 + 3cdyz^2 + 3cky^2z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Faisons d'abord $b = 0$, $d = 0$, dans les équations (24) et (25), on aura

$$(26)\qquad aX^3 + cZ^3 + kXY^2 = 0,$$

$$(27)\qquad 3ax^2 - ky^2 = 0.$$

(On a supprimé dans π le facteur z, puisque, comme il a été convenu, on suppose qu'aucune des variables x, y, z n'est nulle.)

De l'équation (27) on tire

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{\sqrt{3ak}}{3a}.$$

On voit que, si on laisse les coefficients indéterminés dans l'équation (26), la solution triple n'existe pas, puisque le rapport $\frac{x}{y}$ est irrationnel en général ; mais nous allons établir les conditions pour que, dans la solution triple, x, y, z soient entiers. v étant un nombre entier, posons

$$(28)\qquad 3ak = v^2;$$

on a alors

$$(29)\qquad \frac{x}{y} = \pm \frac{v}{a}.$$

Si, maintenant, on remplace, dans l'équation (26), x et k par leurs valeurs tirées des équations (28) et (29), on obtient

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{2v}{\sqrt[3]{2ca^2}},$$

et, en posant, u étant un nombre entier,

$$(30)\qquad ca^2 = 4u^3.$$

on a

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v}{u}.$$

Ainsi la solution triple est

$$(uv, \pm au, av).$$

Voyons maintenant ce que devient l'équation (26). Si l'on y remplace k et c par leurs valeurs tirées des équations (28) et (30), on a

$$a^3 X^3 + 3 a v^2 X Y^2 + 4 u^3 z^3 = 0,$$

ou, en multipliant par 2 les deux membres,

$$(aX + vY)^3 + (aX - vY)^3 + (2uZ)^3 = 0.$$

On voit sans peine, sous cette forme, que l'équation (26) n'admet pas d'autre solution que la solution triple que nous avons trouvée.

Considérons maintenant le cas où k est nul dans l'équation (24). Alors les équations (24) et (25) deviennent

(31) $aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ = 0, \qquad (27abc + d^3) = 0.$

Dans la dernière, on a supprimé le facteur commun xyz. La seconde des équations (31) ne contenant aucune des inconnues x, y, z, il n'y a pas lieu de chercher la racine triple ; interprétons néanmoins la condition qu'elle exprime. Supposons d'abord que a, b, c soient égaux à 1 : alors l'équation de condition donne $d = -3$ et la première des équations (31) devient

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XZ = 0$$

ou

$$(X + Y + Z)(X^2 + Y^2 + Z^2 - YZ - XZ - XY) = 0.$$

Ainsi, dans le cas actuel, la condition $\pi = 0$ exprime que le premier membre de l'équation donnée est décomposable en deux facteurs, entiers et rationnels.

Le cas où a, b, c ne sont pas toujours égaux à 1 se ramène au précédent, en posant

$$U = \sqrt[3]{a}\,X, \qquad V = \sqrt[3]{b}\,Y, \qquad T = \sqrt[3]{c}\,Z.$$

Le premier membre de l'équation donnée est encore décomposable en deux facteurs entiers et rationnels par rapport à X, Y, Z, seulement les coefficients sont, en général, incommensurables.

10. Nous avons établi (n°s 2 et 3) des formules dues à Cauchy, qui font connaître une deuxième solution (X, Y, Z) quand on en connaît une première (x, y, z). Nous les appellerons désormais *formules de première espèce* pour les distinguer d'autres formules également dues à Cauchy et que nous appellerons *formules de seconde espèce*. La recherche des nouvelles formules est l'objet du problème suivant :

Problème II. — *Trouver des formules qui donnent une troisième solution* (X, Y, Z), *lorsque deux autres* (x, y, z), (x', y', z') *sont connues.*

On part des équations (2) et (3), comme dans le problème I; mais, au lieu de laisser d'abord u, v, t indéterminés, on fait $u = x'$, $v = y'$, $t = z'$. De plus, on remplace, dans l'équation (3), $\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^{(2)}$ par l'expression qui lui est identique, comme il a déjà été dit, c'est-à-dire par $x\frac{dF}{du} + y\frac{dF}{dv} + z\frac{dF}{dz}\cdot$ Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$X = x\rho + x', \qquad Y = y\rho + y', \qquad Z = z\rho + z',$$

$$\left(x'\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz}\right)\rho + x\frac{dF}{dx'} + y\frac{dF}{dy'} + z\frac{dF}{dz'} = 0.$$

Tirant maintenant de la dernière la valeur de ρ et la substituant dans les trois autres, on a les formules de

seconde espèce

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} X &= x\left(x\frac{dF}{dx'}+y\frac{dF}{dy'}+z\frac{dF}{dz'}\right)\\ &\quad -x'\left(x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}\right),\\ Y &= y\left(x\frac{dF}{dx'}+y\frac{dF}{dy'}+z\frac{dF}{dz'}\right)\\ &\quad -y'\left(x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}\right),\\ Z &= z\left(x\frac{dF}{dx'}+y\frac{dF}{dy'}+z\frac{dF}{dz'}\right)\\ &\quad -z'\left(x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}\right). \end{aligned}\right.$$

Remarque. — Les formules (32) cesseraient d'être applicables, si (x', y', z') était la solution déduite de la solution (x, y, z) à l'aide des formules (5) ou des formules équivalentes. En effet, (x', y', z') est la solution que nous avons désignée par (X, Y, Z) dans ces formules, et, comme l'équation (9, n° 2) est satisfaite, on a

$$x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}=0.$$

Alors les formules (32) donnent pour X, Y, Z les valeurs de x, y, z multipliées par un même facteur, c'est-à-dire que l'on retombe sur la première solution.

11. *Applications des formules* (32).

1° On peut supposer dans les formules (32) que l'on donne aux variables x', y', z' correspondant à l'une des solutions (x', y', z') des valeurs numériques déterminées; on a alors des formules qui, comme les formules (16), donnent X, Y, Z en fonction des variables x, y, z correspondant à une seule solution donnée (x, y, z). Les fonctions sont du second degré en x, y, z au lieu du quatrième; mais aussi il faut observer que

les formules deviendraient illusoires si l'on y faisait

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z',$$

ou bien encore si (x', y', z') était la solution déduite de (x, y, z) à l'aide des formules (16) ou des formules équivalentes.

2° Si l'équation qu'on obtient en égalant l'une des variables à zéro dans l'équation (1) admet des valeurs entières pour les deux autres variables, si, par exemple, on a

$$x' = m, \qquad y' = n, \qquad z' = 0,$$

on pourra remplacer, dans les formules (32), x', y', z' respectivement par m, n, 0 et l'on aura encore X, Y, Z par des formules du second degré en x, y, z. Dans le cas où, en faisant successivement chacune des variables x', y', z' égale à zéro, les équations du troisième degré correspondantes auraient leurs trois racines commensurables, on aurait neuf formules, de sorte qu'à une solution (x, y, z) correspondraient neuf solutions : c'est ce qui arrive, par exemple, pour l'équation

$$\begin{aligned}X^3 + 2Y^3 - 20XYZ - 18YZ^2 - ZX^2 \\ - XY^2 - ZY^2 - 9XZ^2 - 2YX^2 = -9Z^3.\end{aligned}$$

Cette équation admet la solution (1, 1, 1) et à cette solution correspondent les neuf solutions

$$(1, 1, 2), \quad (3, 1, 2), \quad (0, 1, 2), \quad (6, 3, 5), \quad (6, 3, 7),$$
$$(2, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (3, 0, 1), \quad (3, 0, 1),$$

dont deux, comme on voit, sont identiques.

12. *Simplification des formules* (32) *dans le cas de l'équation*

$$aX^3 - bY^3 - cZ^3 + dXYZ = 0.$$

On remarque d'abord que, dans le cas actuel, les for-

mules (32) peuvent s'écrire

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned} X &= 3byy'(xy' - yx') \\ &\quad + 3czz'(xz' - zx') + d(x^2y'z' - x'^2yz), \\ Y &= 3axx'(yx' - xy') \\ &\quad + 3czz'(yz' - zy') + d(y^2x'z' - y'^2xz), \\ Z &= 3axx'(zx' - xz') \\ &\quad + 3byy'(zy' - yz') + d(z^2x'y'^2 - z'^2xy). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, des deux équations

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dxyz = 0,$$
$$ax'^3 + by'^3 + cz'^3 + dx'y'z' = 0,$$

on tire

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned} a &= \frac{c(y^3z'^3 - z^3y'^3) + dyy'(y^2x'z' - y'^2xz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3}, \\ b &= \frac{c(z^3x'^3 - x^3z'^3) - dxx'(x^2y'z' - x'^2yz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3}, \end{aligned}\right.$$

et si l'on substitue, dans la première des équations (33), pour a et b les valeurs (34), on a

$$(35)\quad X = \frac{[3c(zx' - xz')(yz' - zx') + d(xy' - yx')^2](x^2y'z' - x'^2yz)}{x^2y'^2 - xyx'y' - y^2x'^2}.$$

Or la valeur de Y, dans les équations (33), se déduit de celle de X en y changeant b en a et permutant x, y, ainsi que x', y', et, comme le changement de b en a se fait dans les formules (34) par les mêmes permutations, on déduira la valeur de Y de celle de X donnée par l'équation (35), en faisant dans cette dernière les permutations indiquées. Par là, comme on le voit aisément, le facteur $x^2y'z' - x'^2yz$ change seul et devient $y^2x'z' - y'^2xz$: on a donc

$$\frac{X}{Y} = \frac{x^2y'z' - x'^2yz}{y^2x'z' - y'^2xz}.$$

On trouverait de même

$$\frac{Z}{Y} = \frac{z^2x'y' - z'^2xy}{y^2x'z' - y'^2xz}.$$

On obtient donc finalement les formules demandées

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= x^2 y' z' - x'^2 y z, \\ Y &= y^2 x' z' - y'^2 x z, \\ Z &= z^2 x' y' - z'^2 x y. \end{aligned} \right.$$

J'avais déjà obtenu ces formules par la méthode des identités dans le cas où d est nul ([1]); mais M. Sylvester les a données sans démonstration dans le cas plus général.

13. *Cas où l'équation* (1) *est symétrique par rapport à deux des variables,* X, Y *par exemple.*

On a alors

$$b = a, \qquad g = e, \qquad h = f, \qquad l = k$$

et les solutions (x, y, z), (x', y', z') peuvent alors s'écrire aussi (x, y, z), (x', y', z'). Mais les formules (32) n'étant pas symétriques par rapport à x, y ou x', y', on comprend que l'on trouve plus d'une nouvelle solution. Or, si l'on combine, deux à deux, les quatre solutions précédentes, on a six groupes des solutions données; mais, si l'on exclut la solution $(1, -1, 0)$ et que l'on considère (α, β, γ), (β, α, γ) comme une seule solution, on n'obtiendra, en général, comme il est aisé de le voir, que deux solutions distinctes. Dans le cas où (x, y, z), (x', y', z') seraient deux solutions déduites l'une de l'autre à l'aide des formules (16) ou des formules équivalentes, on ne trouverait plus qu'une solution nouvelle.

Faisons d'abord application de ce qui précède à l'équation $X^3 + Y^3 = 7Z^3$. Si l'on permute d'abord x, y

([1]) *Voir* le Mémoire inséré dans les *Nouvelles Annales,* 2e série, t. XVIII, p. 23; 1879. Nous indiquerons désormais les nombreux renvois à ce Mémoire par les mots en usage *loco citato.*

dans les formules (36), on aura les suivantes

$$(37) \quad \begin{cases} X = y^2 y' z' - x'^2 x z, \\ Y = x^2 x' z' - y'^2 y z, \\ Z = z^2 x' y' - z'^2 x y. \end{cases}$$

Remplaçons maintenant, dans les formules précédentes, x, y, z par $2, -1, 1$ et x', y', z' par $4, 5, 3$, la deuxième solution étant déduite de la première à l'aide des formules (18), on trouve la solution (—17, 73, 38).

Si l'on avait pris pour point de départ la solution (2, —1, 1) et la solution (—1256, 1265, 183), qui est la troisième solution déduite des formules (18), on aurait trouvé les deux solutions distinctes (—1256, 1265, 183), (—65882, 90271, 40049), mais dont la première est déjà connue.

M. Lucas a, le premier, déduit la solution (—7, 73, 38) de nouvelles formules qu'il a fait connaître; mais ces formules sont inutiles au point de vue de la résolution des équations cubiques; car, comme il est aisé de le voir, elles sont la conséquence immédiate des formules de Cauchy de première et de seconde espèce. Il suffit en effet, pour retrouver les formules de M. Lucas, de remplacer, dans les formules (37), x', y', z' par les expressions que donnent les formules (18, n° 4).

14. Dans ce qui précède, je n'ai fait que simplifier ou compléter des résultats déjà obtenus par Cauchy; mais ici commence la partie entièrement neuve. Je vais d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Lorsqu'une équation cubique, homogène, à trois variables, peut être résolue en nombres entiers, et qu'on en connaît une solution* (x, y, z), *on*

peut toujours ramener sa résolution à celle d'une équation biquadratique.

Commençant un calcul semblable à celui du n° 2, on pose

$$(38)\qquad X = \rho x + u, \qquad Y = \rho y + v, \qquad Z = \rho z.$$

Alors, si l'on substitue dans l'équation (1) les valeurs précédentes de X, Y, Z, on a

$$\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)\rho^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} + F(u, v, 0) = 0,$$

et, si l'on résout cette équation par rapport à ρ, il vient

$$(39)\qquad \rho = \frac{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} \\ \pm\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)}\right]^2 - 4\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)F(u, v, 0)} \end{array}\right\}}{2\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)};$$

égalant maintenant la quantité sous le radical au carré d'une nouvelle variable w, on obtient entre les trois variables u, v, w l'équation biquadratique

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)}\right]^2 \\ \quad - 4\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)F(u, v, 0) = w^2. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, la formule (39) devient

$$\rho = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} \pm w}{2\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)},$$

et, en substituant la valeur précédente de ρ dans les for-

mules (38), on a

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right)^{(2)} \pm w\right]x \\ &\qquad - 2\,u\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right), \\ \mathrm{Y} &= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right)^{(2)} \pm w\right]y \\ &\qquad + 2\,v\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right), \\ \mathrm{Z} &= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right)^{(2)} \pm w\right]z. \end{aligned}\right.$$

Les formules (41) sont les formules demandées.

L'équation (40) peut d'ailleurs être toujours résolue en nombres entiers, car on y satisfait en prenant

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{d\mathrm{F}}{dy}, \\ v &= -\frac{d\mathrm{F}}{dx}, \\ w &= \pm\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right)^{(2)}. \end{aligned}\right.$$

On aurait aussi immédiatement une autre solution si l'équation $\mathrm{F}(u, v, 0)$ admettait une solution entière (u', v'); car on pourrait prendre

$$(43)\quad u = u', \qquad v = v', \qquad w = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u' + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v'\right)^{(2)}.$$

Enfin, on peut encore obtenir directement et dans tous les cas une autre solution de l'équation (40), mais en se servant de deux solutions (x, y, z), $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ de l'équation (1). En effet, on déduit des formules (40)

$$\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x = 2uz\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right),$$

$$\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y = 2vz\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,u + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,v\right);$$

d'où

$$\frac{Xz - Zx}{Yz - Zy} = \frac{u}{v}.$$

Je dis que l'on peut prendre

$$(44) \qquad u = Xz - Zx, \qquad v = Yz - Zy.$$

En effet, m désignant une indéterminée, on peut écrire

$$u = m(Xz - Zx), \qquad v = m(Yz - Zy).$$

Alors, en substituant pour u et v ces valeurs dans le premier membre de l'équation (40), ce premier membre prendra la forme $m^4 q^2$ et, par l'extraction d'une racine carrée, on aura $w = m^2 q$. Or, en substituant dans les formules (41) pour u, v, w les valeurs précédentes, m^2 disparaît comme facteur commun; on peut donc prendre les valeurs de u, v données par les formules (44) et l'on aura q pour valeur correspondante de w.

Remarque. — La solution donnée par les formules (42) ne conduit pas à de nouvelles solutions de l'équation (1); car, si l'on prend w avec le signe —, on voit que X, Y, Z sont respectivement égaux à x, y, z multipliés par un même nombre, c'est-à-dire que l'on retrouve la solution (x, y, z), et, si l'on prend w avec le signe +, on obtient la solution insignifiante (0, 0, 0). On arriverait aux mêmes conclusions, si l'on avait pris la solution donnée par les formules (43). Mais il n'en est plus de même quand on fait usage des formules (44).

Faisons application de ce qui précède à l'équation

$$(45) \qquad X^3 - Y^3 - 7Z^3 = 0.$$

L'équation (40) est alors

$$(46) \qquad -4u^4 - 12u^2v^2 - 4u^3v - 16uv^3 - v^4 = 3w^2.$$

En formant l'équation (46), on a changé w en $3w$; on

devra donc faire le même changement dans les formules (41), (42) et (43). On part de la solution (2, —1, 1) de l'équation (45), et, à l'aide des formules (42) et (43) modifiées comme on vient de le dire, on calcule les deux solutions (1, — 4, 14), (1, — 1, 1) de l'équation (46). De ces deux solutions elles-mêmes on déduit la solution (1, — 7, 29) de la même équation en se servant de formules qui seront données dans un prochain Mémoire sur les équations biquadratiques. Alors, si l'on remplace dans les formules (41), où l'on change w en $3w$, les quantités u, v, w par les valeurs 1, — 7, 29, on trouve les deux solutions de l'équation (45), (5, 4, 3), (73, — 17, 28).

On peut encore employer les formules (44). Si l'on prend les deux solutions (2, — 1, 1), (4, 5, 3) de l'équation (45), ces formules donnent $u = -1$, $v = 4$, et, par l'équation (46), on a $w = 7$. Alors les formules (41) donnent les deux solutions de l'équation (45),

$$(-1256,\ 1265,\ 183), \quad (-65882,\ 90271,\ 40049).$$

Ces deux solutions ont déjà été déduites des formules (36) et (37). On pourra aisément s'en rendre compte.

15. Une question se présente maintenant : peut-on trouver l'équation cubique dont la résolution se ramène à celle d'une équation biquadratique donnée ? Mais, dans l'état actuel de la Science, il suffira de résoudre la question dans le cas où l'équation biquadratique est de la forme

$$(47) \qquad AX_1^4 + BY_1^4 = CZ_1^2,$$

avec la condition $C = A + B$; car cette forme comprend toutes les équations biquadratiques dont on a obtenu la

solution complète. On est ainsi conduit à se proposer le problème suivant :

Problème III. — *Étant donnée l'équation* (47) *dans laquelle* C *est égal à* A + B, *trouver l'équation cubique homogène dont la résolution s'y ramène.*

On remarque d'abord que, si l'on pose $CZ_1 = Z'$, l'équation (47) peut s'écrire

$$ACX_1^4 + BCY_1^4 = Z'^2. \tag{48}$$

Prenons maintenant l'équation cubique suivante qui ne contient, outre les variables X, Y, Z, que les deux indéterminées e et f,

$$e(X+Y)Z^2 + 2fY^2Z - (X-Y)(X^2+Y^2) = 0. \tag{49}$$

En résolvant cette équation par rapport à Z, on a

$$Z = \frac{-fY^2 \pm \sqrt{eX^4 + (f^2-e)Y^4}}{e(X+Y)}. \tag{50}$$

Si maintenant on écrit que la quantité sous le radical dans la formule précédente est égale au carré d'une indéterminée Z′, on est ramené à résoudre l'équation biquadratique

$$eX_1^4 + (f^2-e)Y_1^4 = Z'^2, \tag{51}$$

qui est de même forme que l'équation (48), puisque dans toutes les deux la somme des coefficients de X_1^4 et de Y_1^4 est égale à un carré et que le coefficient du carré de la troisième inconnue est égal à 1. On prendra alors, dans l'équation (49), $e = AC$, $f = C$, et la résolution de l'équation cubique

$$AC(X+Y)Z^2 + 2CY^2Z - (X-Y)(X^2+Y^2) = 0 \tag{52}$$

sera ramenée à celle de l'équation biquadratique (48).

Cela posé, si, dans la formule (50), on remplace X, Y

par X_1, Y_1, le radical par Z', et e, f par AC, C, on aura

$$Z = \frac{-CY_1^2 \pm Z'}{AC(X_1 + Y_1)}.$$

On a d'ailleurs

$$X = X_1, \qquad Y = Y_1;$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} X &= ACX_1(X_1 + Y_1), \\ Y &= ACY_1(X_1 + Y_1), \\ Z &= -CY_1^2 \pm Z', \end{aligned}$$

ou encore, après avoir remplacé Z' par CZ_1,

$$(53) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= AX_1(X_1 + Y_1), \\ Y &= AY_1(X_1 + Y_1), \\ Z &= -(Y_1^2 \pm Z_1). \end{aligned} \right.$$

Les formules (53) sont les formules demandées.

Faisons une application de ces formules à l'équation

$$(54) \qquad 3X_1^4 - 2Y_1^4 = Z_1^2,$$

qui est une de celles qui ont été résolues par le P. Pépin.

L'équation (52) est alors

$$(55) \qquad 3(X + Y)Z^2 + 2Y^2Z - (X - Y)(X^2 + Y^2) = 0,$$

et les formules (53) deviennent

$$(56) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= 3X_1(X_1 + Y_1), \\ Y &= 3Y_1(X_1 + Y_1), \\ Z &= -(Y_1^2 \pm Z_1). \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend d'abord $X_1 = Y_1 = Z_1 = 1$, les formules (58) donnent les solutions évidentes (1, 1, 0), (3, 3, 1); mais, si ensuite on prend $X_1 = 33$, $Y_1 = 13$, $Z_1 = 1871$, on a, par les mêmes formules, les deux solutions (99, 39, 37), (759, 299, $-$ 340).

Remarques diverses. — I. La méthode employée pour la résolution de l'équation (52) peut s'étendre à toute équation cubique, homogène à trois variables, qui ne contient pas la troisième puissance d'une des inconnues. On passera ensuite de là à l'équation (1) par la méthode de Gauss modifiée comme je l'ai fait, page 9 du Mémoire de 1879 (*Nouvelles Annales*).

II. La résolution du problème III est *actuellement* plus importante que la solution du problème inverse qui ramènerait la résolution d'une équation biquadratique à celle d'une équation cubique, puisque jusqu'ici aucun géomètre n'a démontré qu'il avait obtenu la solution complète d'une équation cubique, tandis que l'on connaît la solution complète de plusieurs équations biquadratiques [1].

III. Il est curieux qu'on n'ait pas encore obtenu pour les équations cubiques d'autres formules que celles de Cauchy, de première et de seconde espèce. Toutes les tentatives pour trouver d'autres formules ont été vaines : on a vu ici même que des formules, que M. Lucas croyait nouvelles, sont la conséquence des formules de Cauchy.

16. Je me propose dans ce dernier paragraphe de montrer comment on peut quelquefois trouver des solutions d'une équation cubique, homogène à trois variables, au moyen de celles d'une équation cubique de même espèce, et en même temps j'obtiendrai des identités d'où l'on déduira des cas de possibilité de l'équa-

---

[1] Le P. Pépin a le premier, dans divers Mémoires, donné la solution complète de plusieurs équations biquadratiques à coefficients numériques.

tion proposée. A ce dernier point de vue, le présent article peut être considéré comme une suite de celui de 1879 que nous avons déjà cité plusieurs fois.

Je vais d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème V. — *Lorsque l'équation* (1) *ne contient que le cube de l'une des inconnues et que l'équation obtenue, en égalant cette inconnue à zéro, a au moins une solution entière, si l'on connaît une solution* (x, y, z) *d'une autre équation cubique convenablement déterminée, on pourra trouver une solution* (X, Y, Z) *de l'équation proposée par des formules du troisième degré qui donneront* X, Y, Z *en fonction de* x, y, z.

On a vu (*loco citato*, p. 5) que l'on peut trouver une infinité de solutions de l'équation

$$X^2 + AXY + BY^2 = V^3 \tag{57}$$

à l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} X &= x^3 - 3Bxy^2 - ABy^3, \\ Y &= 3x^2y + 3Axy^2 + (A^2 - B)y^3, \\ V &= x^2 + Axy + By^2 \text{ [1]}. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

C'est ce résultat qui va nous servir de point de départ. Soit

$$aX^3 + bY^3 + kXY^2 + lYX^2 = cZ^3 \tag{59}$$

l'équation proposée, et supposons que l'équation

$$aX^3 + bY^3 + kXY^2 + lYX^2 = 0 \tag{60}$$

admette la solution entière (m, n). En divisant le premier membre de l'équation (59) par $nX - mY$, on la

---

[1] On ne les obtient pas toutes : ce sont d'autres formules qui donnent la solution complète.

met sous la forme

$$(61)\quad \left\{ \begin{aligned} &(nX - mY)[an^2X^2 + (am + ln)nXY \\ &\qquad + (am^2 + lmn + kn^2)Y^2] = cn^3Z^3, \end{aligned} \right.$$

ou, en multipliant les deux membres par a^2 et posant $naX = X'$,

$$(62)\quad \left\{ \begin{aligned} &(X' - maY)[X'^2 + (am + ln)X'Y \\ &\qquad + a(am^2 + lmn + kn^2)Y^2] = ca^2n^3Z^3. \end{aligned} \right.$$

Soient maintenant

$$(63)\qquad Z = zV, \qquad X' - maY = ca^2(nz)^3.$$

En remplaçant, dans l'équation (62), Z et $X' - maY$ par les expressions que donnent les formules (63), cette équation devient, en supprimant un facteur commun,

$$X'^2 + (am + ln)X'Y + a(am^2 + lmn + kn^2)Y^2 = V^3,$$

et l'on est ainsi amené à résoudre une équation de la forme (57). En employant les formules (58), on a

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} X' &= x^3 - 3a(am^2 + lmn + kn^2)xy^2 \\ &\qquad + a(am + ln)(am^2 + lmn + kn^2)y^3, \\ Y &= 3x^2y + 3(am + ln)xy^2 \\ &\qquad + [(l^2 - ak)n^2 + almn]y^3, \\ V &= x^2 + (am + ln)xy \\ &\qquad + a(am^2 + lmn + kn^2)y^2, \end{aligned} \right.$$

et, par suite, d'après la première des formules (63),

$$Z = z[x^2 + (am + ln)xy + a(am^2 + lmn + kn^2)y^2].$$

Si l'on désigne maintenant par P, Q, R les seconds membres des équations (64), qu'on remplace X' par naX et qu'on multiplie par na les deux membres des formules qui donnent Y et Z, on aura, en supprimant na dans les premiers membres,

$$(65)\qquad X = P, \qquad Y = naQ, \qquad Z = nazR.$$

Cela posé, si l'on remplace, dans la seconde des équations (63), X′ et Y par les valeurs P et Q, on a l'équation du troisième degré

$$(66)\qquad P - maQ = ca^2(nz)^3.$$

(X, Y, Z), (x, y, z) étant respectivement des solutions des équations (59) et (66), on voit que X, Y, Z sont des fonctions du troisième degré de x, y, z données par les formules (65) : le théorème est donc démontré.

Remplaçons maintenant, dans l'équation (59), X, Y, Z par les valeurs que donnent les équations (65) ; on aura

$$aP^3 + b(naQ)^3 + kP(naQ)^2 + lP^2naQ = aa^2c(nz)^3R^3,$$

et, si l'on met dans l'équation précédente, à la place de $a^2c(nz)^3$, la valeur $P - maQ$ que donne l'équation (66), on a l'identité

$$(67)\qquad \left\{ \begin{aligned} & aP^3 + b(naQ)^3 + kP(naQ)^2 + lP^2naQ \\ & \quad = a(P - maQ)R^3. \end{aligned} \right.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VI. — *Lorsque, le premier membre de l'équation* (59) *étant égalé à zéro, on a ainsi une équation qui admet une solution entière* (m, n), *cette équation peut être résolue en nombres entiers toutes les fois que* c *est égal à la fonction du troisième degré représentée par* $a(P - maQ)$.

Appliquons les théorèmes V et VI à l'équation

$$(68)\qquad X^3 + Y^3 = cZ^3.$$

On a

$$m = -1, \qquad n = 1, \qquad k = 0, \qquad l = 0;$$

alors les équations (65) et (66) deviennent

$$(69)\quad \begin{cases} X = x^3 - 3xy^2 + y^3, \\ Y = 3x^2y - 3xy^2, \\ Z = z(x^2 - xy + y^2), \end{cases}$$

$$(70)\quad x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + y^3 = cz^3,$$

et les formules (69) permettent de passer d'une solution de l'équation (70) à une solution de l'équation (68). On a d'ailleurs l'identité

$$(71)\quad \begin{cases} (x^3 - 3xy^2 + y^3)^3 + (3x^2y - 3xy^2)^3 \\ \quad = (x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + y^3)(x^2 - xy + y^2)^3, \end{cases}$$

qui démontre que l'équation (68) peut être résolue en nombres entiers lorsqu'on a

$$c = x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + y^3.$$

L'identité (71) n'est autre que l'identité (42) (*loco citato*, p. 18).

On peut donner une solution plus générale des deux questions précédentes. Pour éviter les longues écritures, j'expliquerai la méthode en prenant pour exemple l'équation (68); mais on verra bien qu'elle s'étend à l'équation plus générale (59).

Si l'on pose, suivant la notation déjà adoptée,

$$\begin{aligned} P &= x^3 - 3xy^2 + y^3, \\ Q &= 3xy(x - y), \\ R &= x^2 - xy + y^2, \end{aligned}$$

l'identité (71) peut s'écrire

$$(72)\quad P^3 + Q^3 = (P + Q)R^3,$$

et l'on a d'ailleurs

$$(73)\quad P + Q = cz^3.$$

Posons encore

$$\gamma = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2, \tag{74}$$

α, β représentant des nombres entiers. Si l'on multiplie alors les deux membres de l'équation (72) par γ^9, on pourra l'écrire

$$(\gamma^3 P)^3 + (\gamma^3 Q)^3 = \gamma^3 (P + \gamma^3 Q)(\gamma R)^3. \tag{75}$$

Or, d'après l'identité (3) (*loco citato,* p. 4), on a

$$\gamma R = (\alpha x - \beta y)^2 \\ -(\alpha x - \beta y)[\beta x + (\alpha - \beta) y] + [\beta x + (\alpha - \beta) y^2],$$

et, si l'on pose

$$\alpha x - \beta y = x', \qquad \beta x + (\alpha - \beta) y = y', \tag{76}$$

il vient

$$\gamma R = x'^2 - x'y' + y'^2. \tag{77}$$

D'ailleurs, des deux équations (76), on tire

$$x = \frac{(\alpha - \beta) x' - \beta y'}{\gamma}, \qquad y = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\gamma}. \tag{78}$$

Si maintenant on remplace, dans l'identité (75), x, y par les valeurs précédentes, qu'on désigne par P_1, Q_1 ce que deviennent alors $\gamma^3 P$, $\gamma^3 Q$ après la suppression des accents de x', y', puis enfin que l'on remarque que, après cette suppression, à cause de l'équation (77), γR peut être remplacé par R, l'identité (75) deviendra

$$P_1^3 + Q_1^3 = (P_1 + Q_1) \gamma^3 R^3. \tag{79}$$

D'autre part, si l'on multiplie par γ^3 les deux membres de l'équation (73), on a

$$P_1 + Q_1 = c \gamma^3 z^3, \tag{80}$$

et, en remplaçant, dans l'identité (79), $P_1 + Q_1$ par la

valeur que donne l'équation (80), on obtient

$$(81)\qquad P_1^3 + Q_1^3 = c(\gamma^2 R z)^3.$$

En même temps on a les formules

$$(82)\qquad X = P_1, \qquad Y = Q_1, \qquad Z = \gamma^2 R z,$$

les valeurs de P_1, Q_1 étant

$$\begin{aligned} P_1 = &(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \beta^3)x^3 + 9\alpha\beta(\alpha - \beta)x^2y \\ &- 3(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + \beta^3)xy^2 + (\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \beta^3)y^3, \\ Q_1 = &3[-(\alpha - \beta)]\alpha\beta x^3 + (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + \beta^3)x^2y \\ &-(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \beta^3)xy^2 - (\alpha - \beta)\alpha\beta y^3. \end{aligned}$$

Appliquons les résultats précédents au cas où l'on a $\alpha = 1$, $\beta = 1$, et, par suite, $\gamma = 3$. L'équation (80) et les formules (82) deviendront

$$(83)\qquad x^3 - 3x^2y + y^3 = 3cz^3,$$

$$(84)\qquad \left\{ \begin{aligned} X &= x^3 - 6x^2y + 3xy^2 + y^3, \\ Y &= 2x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 2y^3, \\ Z &= 3z(x^2 - xy + y^2). \end{aligned} \right.$$

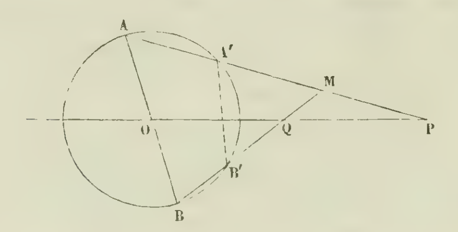
Ainsi, on passe d'une solution de l'équation (83) à une solution de l'équation (68) au moyen des formules (84). Ce résultat particulier avait déjà été obtenu par M. Lucas.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1886).

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle et deux points P et Q situés sur un de ses diamètres; on joint les points P et Q aux extrémités A et B d'un diamètre du cercle par les droites PA et QB qui se coupent au point M; on fait tourner le diamètre AB, et l'on demande :

1° D'étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$ et de construire la figure lorsque ce rapport a une valeur donnée;



2° D'étudier la variation de l'angle AMB et de construire la figure lorsque cet angle a une valeur donnée;

3° A′ et B′ étant les seconds points d'intersection des droites MA et MB avec la circonférence du cercle donné, de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés dans un plan une droite D, un point O sur cette droite, et une droite D′, on demande :

1° De former l'équation générale des coniques qui touchent la droite D au point O et qui ont la droite D′ pour directrice;

2° De montrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque P du plan. Déterminer la région où doit se trouver le point P pour que ces deux courbes soient réelles et, dans ce cas, en reconnaître le genre.

3° Les deux coniques du faisceau considéré qui passent en un point P se coupent en un second point P′; calculer les coordonnées du point P′ en fonction de celles du point P; et, en supposant que le point P décrive une ligne C, trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne pour que le point P′ décrive la même ligne.

Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Démontrer que, quand n augmente indéfiniment, la fraction

$$\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$

tend vers une limite $\Gamma(a)$ qui est une fonction bien déterminée de a, pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de cette variable.

Montrer que, si l'on donne à a une valeur positive, la fonction $\Gamma(a)$ est égale à l'intégrale eulérienne

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

Montrer que, pour une valeur quelconque de a, on a les relations suivantes :

$$\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a), \qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Application. — On désigne par p et q deux quantités réelles et l'on propose :

1° De calculer le module de $\Gamma(qi)$;

2° De montrer que $\Gamma(p+qi)$ tend vers zéro lorsque q devient infini, la quantité p restant comprise entre $-\infty$ et un nombre positif fini;

3° De calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(1+yi)\,dy$.

Mécanique.

Un solide homogène, sur lequel n'agit aucune force extérieure, a la forme d'un parallélépipède rectangle

dont les arêtes ont respectivement pour longueurs a, $2a$, $4a$; il est d'abord en repos, mais il peut se mouvoir librement dans l'espace.

Une sphère homogène, animée d'un mouvement de translation uniforme dont la vitesse U est parallèle aux arêtes moyennes du parallélépipède, vient choquer ce solide en un point M situé sur l'une de ses faces F, perpendiculaire à ses arêtes moyennes.

La masse du parallélépipède est représentée par 12 et celle de la sphère par 4; les deux corps sont parfaitement élastiques.

Cela posé, on demande :

1° De déterminer les conditions initiales du mouvement que les deux solides prendront après le choc;

2° D'étudier le mouvement que prendra ultérieurement le parallélépipède dans le cas particulier où le point M coïncide avec l'un des sommets de la face choquée F.

Calcul.

Sur un cylindre droit, dont la base est un cercle de 5^m de rayon, on a tracé une hélice qui coupe les génératrices du cylindre sous un angle de 30°. Calculer, avec l'approximation que comporte l'emploi des Tables à sept décimales, la longueur du plus petit arc de l'hélice considérée, tel que les tangentes menées à la courbe aux extrémités de cet arc se rencontrent.

Épure.

On donne : 1° un paraboloïde de révolution autour d'un axe vertical OZ; 2° deux cylindres circonscrits à la sphère qui touche le paraboloïde en tous les points du parallèle dont le plan passe par le foyer F du paraboloïde.

Les axes des cylindres sont horizontaux et chacun d'eux fait un angle de 45° avec le plan vertical de projection.

L'espace intérieur au paraboloïde étant considéré comme plein, on demande de représenter la partie de ce solide qui est extérieure aux deux cylindres. Les plans de projection sont opaques.

L'axe OZ est à $0^m,10$ en avant du plan vertical; la cote du sommet du paraboloïde est égale à $0^m,20$, celle du foyer F à $0^m,18$.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb, editor. Thomas Craig, associate editor. — Published under the auspices of the Johns Hopkins University. — Volume IX, number 1, octobre 1886. — Baltimore, publication Agency of the Johns Hopkins University.

On multiple Algebra. An address before the section of Mathematics and Astronomy of the american Association for the advancement of science, at the Buffalo meeting, august 1886; by *J. Willard Gibbs,* vice-président. Mass., U. S., Salem; 1886.

L.-F.-C. Bréguet, membre de l'Académie des Sciences (1804-1883). Notice sur sa vie et ses travaux; par *de Fauque de Jonquières,* vice-amiral, membre de l'Institut. Paris, Librairie militaire de L. Baudoin et Cie, imprimeurs-libraires, rue et passage Dauphine, 30; 1886.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME V, 3e SÉRIE).

Arithmétique.

Algèbre.

Géométrie élémentaire.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Calcul différentiel et intégral.

Mécanique.

Mélanges.

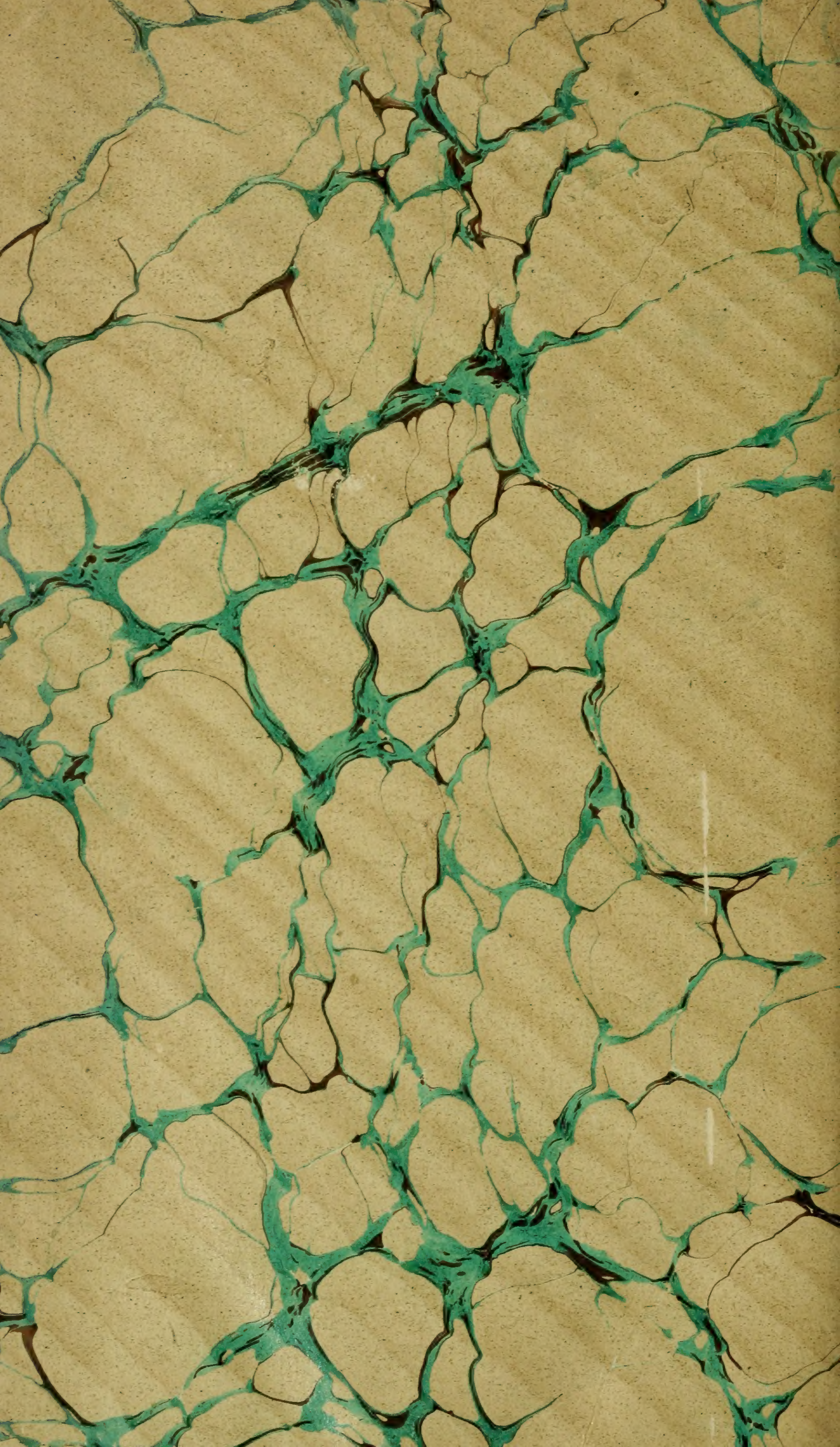
Questions proposées.

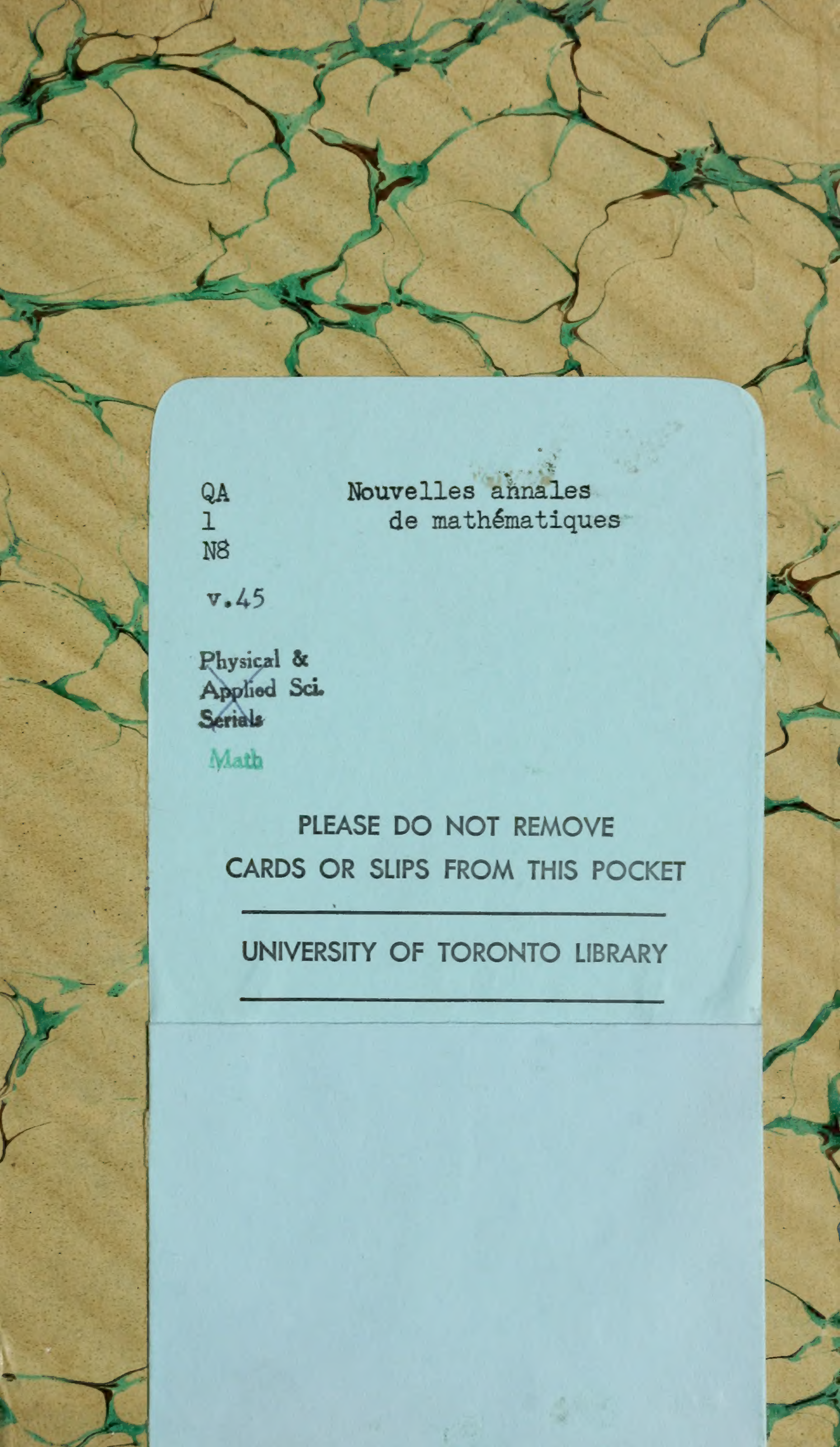
Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME V, 3e SÉRIE).

11364 Paris. -- Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.




QA
1
N8
v.45
Nouvelles annales
de mathématiques
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

